

Magnetooptische Effekte bei inkohärenter Vielfachreflexion - Teil II: Matrizenverfahren

Keßler, Franz Rudolf

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 44, 1993,
S.37-67



Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Magnetooptische Effekte bei inkohärenter Vielfachreflexion – Teil II: Matrizenverfahren¹

Von **Franz Rudolf Keßler***, Braunschweig

(Eingegangen am 25. 08. 1993)

Kurzfassung

Die magnetooptischen (mo) Effekte, das sind Faraday- und mo Kerr-Effekt, sind bei stattfindender Vielfachreflexion in planparallelen Proben bzw. in entsprechend aufgebauten Schichtsystemen stets Überlagerungseffekte, denn die vielfachreflektierten Strahlanteile treten nach mehrfacher Transmission und mehrfacher Reflexion (unter Ein-schluß von Umkehrungen der Lichtausbreitungsrichtung!) zu einer einzigen Meßgröße in Transmission („resultierender Faraday-Effekt“) bzw. Reflexion („resultierender mo Kerr-Effekt“) zusammen. Dabei sind die kohärente und die inkohärente Überlagerung der Teilstrahlen zu unterscheiden. Teil I der Arbeit stellte ein „Iterationsverfahren“ zur Berechnung der mo Effekte einer Planplatte vor. Im vorliegenden Teil II der Arbeit wird der „inkohärente Fall“ dahingehend untersucht, ob ein Matrizenverfahren Anwendung finden kann, die mo Effekte zu berechnen. Die Ergebnisse hängen davon ab, welches Meßverfahren Anwendung findet: die Polarisationsanalyse mit Analysator-drehung („AD-Methode“) oder die getrennte bzw. in Modulation abwechselnde Intensitäts-messung für die rechts- bzw. links-zirkular polarisierte Eigenmode des Lichtes im Magnet-feld („ZPM-Methode“). – Im ersten Fall ist eine Matrizenrechnung grundsätzlich nicht möglich. – Im zweiten Fall ist eine korrekte Matrizenrechnung für die in der Messung al-lein zugängliche mo Elliptizität jedoch gegeben. Eine Beispielrechnung stellt die grund-sätzlich unterschiedlichen Elliptizitätsspektren bei der AD-Methode und der ZPM-Me-thode vergleichend gegenüber. – Für die mo Drehung bei der AD-Methode wird das Ver-fahren einer verbesserten Matrizen-Näherungsrechnung vorgestellt. Es liefert zugleich die mo Elliptizitätswerte der ZPM-Methode in Transmission und Reflexion. In einer Bei-spielrechnung wird dabei bezüglich Drehung und Elliptizität eine Näherungsgenauigkeit erreicht, die typischerweise besser ist als 0,02 %. – Für ein Teilschichtsystem mit kohä-renter Vielfachreflexion innerhalb ein Schichtsystems mit inkohärenter Vielfachrefle-xion wird eine „mo Ersatz-Grenzschichtmatrix“ angegeben, mit deren Hilfe der Einbau des kohärenten Teilschichtsystems in die oben genannten Rechenverfahren möglich ist.

I Einleitung

Die magnetooptischen (mo) Effekte, das sind Faraday- und mo Kerr-Effekte, sind bei stattfindender Vielfachreflexion in planparallelen Proben bzw. in entsprechend aufge-bauten Schichtsystemen stets Überlagerungseffekte, denn die vielfachreflektierten Strah-

¹ Zum Teil I: „Iterationsverfahren“ s. Literaturangabe [1].

* Univ.-Prof. em. Dr. F. R. Keßler · Institut für Halbleiterphysik und Optik · TU Braunschweig · Postfach 3329 · D-38023 Braunschweig/Germany

lenanteile treten nach mehrfacher Transmission und mehrfacher Reflexion (unter Ein-schluß von Umkehrungen der Lichtausbreitungsrichtung!) zu einer einzigen Meßgröße in Transmission („Faraday-Effekt“) bzw. Reflexion („mo Kerr-Effekt“) zusammen. Diese „Effekte“ sind i. allg. komplex, d. h. der ursprünglich linear polarisierte Zustand der eingestrahlten Lichtwelle ändert sich in einen elliptischen, wobei der Drehwinkel zwischen der großen Halbachse der Ellipse und der Polarisationsrichtung des primären, linear polarisierten Lichtes als „Faraday-Drehwinkel“ ϑ bzw. als „mo Kerr-Drehwinkel“ η bezeichnet wird. Der Winkel ϑ wird zum Realteil einer komplexen Faradaydrehung $\tilde{\Theta}$, wenn die bei der Transmission auftretende Elliptizität ε in einem Imaginärteil in entsprechender Weise hinzugenommen wird:

$$\tilde{\Theta} = \vartheta + i \cdot \operatorname{arctanh} \varepsilon \quad (I, 1)$$

Bezüglich des mo Kerr-Effektes gelten die analogen Beziehungen bzw. Definitionen. Ist \tilde{H} ($H = \text{gr. griech. Eta}$) die komplexe mo Kerr-Drehung, so sind η als mo Kerr-Drehung und ζ als mo Kerr-Elliptizität darin enthalten:

$$\tilde{H} = \eta + i \cdot \operatorname{arctanh} \zeta \quad (I, 2)$$

In Bezug auf die komplexen Amplituden $\tilde{E}(+)$ und $\tilde{E}(-)$ der rechts (= „+“) – bzw. links (= „–“) – zirkular polarisierten Eigenmoden des Lichtes im Magnetfeld, wie sie bei linear polarisiertem Licht primär mit gleichem Betrag und gleicher Phase eingestrahlt werden, gilt allgemein, und damit ist der kohärente Fall der Lichtausbreitung in der Probe angesprochen, für die Faradaydrehung bzw. die Faraday-Elliptizität:

$$\begin{aligned} \vartheta(\text{koh}) &= \frac{1}{2} [\operatorname{ARG}(\tilde{E}(+)) - \operatorname{ARG}(\tilde{E}(-))] \\ \varepsilon(\text{koh}) &= \frac{|\tilde{E}(+)| - |\tilde{E}(-)|}{|\tilde{E}(+) + \tilde{E}(-)|} \end{aligned} \quad (I, 3)$$

Bei existierender Vielfachreflexion in der Probe sind dabei die komplexen Feldstärken $\tilde{E}(+)$ bzw. $\tilde{E}(-)$ die aus der phasengerechten Addition der Einzelfeldstärken $\tilde{E}(h,+) = \tilde{E}(h,+) * \exp[i * \varphi(h,+)]$; $h = 1, 2, 3, \dots$ (bzw. analog $\tilde{E}(h,-)$) der Teilstrahlen gebildeten Summen.

In den resultierenden, d. h. im Experiment meßbaren mo Polarisationszuständen „mischen“ sich i. allg. aufgrund der Vielfachreflexion der mo Volumen-Effekt (das wäre der eigentliche Faraday-Effekt) und der Grenzflächeneffekt (das wäre der eigentliche mo Kerr-Effekt), so daß die resultierende mo Drehung und mo Elliptizität nicht isoliert nur auf die Brechzahldifferenz $\Delta n = [n(+) - n(-)]$ für die rechts- und links-zirkular polarisierte Eigenmode des Lichtes im Magnetfeld bzw. nur auf den mo Zirkulardichroismus zurückzuführen sind.

Diesbezüglich erscheint der Hinweis wichtig, daß in der häufig anzutreffenden Darstellung der Faraday-Drehung einer planparallelen Probe bei senkrechtem Lichtdurchgang mit Hilfe der Verdet'schen Konstanten „V“ in der (auf nur einen einmaligen Probedurchgang bezogenen!) Form:

$$\vartheta \text{ (1 Durchgang)} = \frac{\omega}{c} \cdot d \cdot \frac{1}{2} [n(+)-n(-)] = V \cdot B \cdot d \quad (1, 4)$$

$$\begin{array}{ll} \text{mit: } B = \text{magnet. Induktion} & d = \text{Schichtdicke} \\ \omega = \text{Kreisfrequenz des Lichtes} & c = \text{Vakuumlichtgeschwindigkeit} \end{array}$$

bzw. in der Darstellung der Faraday-Elliptizität:

$$\varepsilon \text{ (1 Durchgang)} = \frac{\exp\left(-\frac{\omega}{c} \cdot d \cdot k(+)\right) - \exp\left(-\frac{\omega}{c} \cdot d \cdot k(-)\right)}{\exp\left(-\frac{\omega}{c} \cdot d \cdot k(+)\right) + \exp\left(-\frac{\omega}{c} \cdot d \cdot k(-)\right)} \quad (I, 5)$$

in ihrer Rückführung auf die komplexen Brechungsindizes für die rechts- und links-zirkulare Polarisation:

$$\tilde{n}(\pm) = n(\pm) - i \cdot k(\pm) \quad (I, 6)$$

sowohl der *mo* Kerr-Effekt an den Grenzflächen der Probe als auch die Einflüsse der Vielfachreflexion nicht (!) enthalten sind. Ob sie im Resultat letztlich u. U. vernachlässigt werden können, ist eine andere Frage.

Ein entsprechender Hinweis ist anzubringen in Bezug auf die Berechnung bzw. Interpretation der Messung des komplexen *mo* Kerr-Effektes. Bei planparallelen Proben überlagern sich auch hier mehrfach reflektierte Strahlanteile, so daß in dem in Reflexion summarisch erfaßten „*mo* Kerr-Effekt“ sowohl Anteile des komplexen Faraday-Effektes als auch Anteile des komplexen *mo* Kerr-Effektes der Probenrückseite „beigemischt“ sind. – Den „reinen“ *mo* Kerr-Effekt kann man allerdings isolieren, indem man der Probe z. B. eine geeignete Keilform gibt und nur den ersten Reflex an der Vorderseite in Betracht zieht bzw. analysiert.

Bei der kohärenten Vielfachreflexion, d.h. bei der kohärenten Superposition der Feldstärken, treten in den *mo* Effekten definitionsgemäß die Interferenzeinflüsse in Erscheinung, die auf der verschiedenen Phasenänderung infolge der optischen Wegunterschiede der beiden Eigenmoden beruhen. Bei nicht zu starker Absorption treten damit i. allg. bei der Wellenlängenvariation in den spektralen Abhängigkeiten der *mo* Effekte scharfe Interferenzstrukturen auf, die das „eigentliche“ *mo* Geschehen überlagern und meist sogar dominierend in der Spektralfunktion erscheinen (vgl. weiter unten). Bei dünnen Schichten bzw. Schichtsystemen mit Dicken in der Größenordnung der (quasi-monochromatischen) Lichtwellenlänge im Medium entspricht dies der Realität des experimentellen Befundes.

Bei „unscharfen“ Schichtdicken bzw. größeren spektralen Spaltbreiten mitteln sich jedoch diese Interferenzen hinweg, so daß die *mo* Spektren das erwartete, „geglättete“ Bild des Faraday- bzw. *mo* Kerr-Effektes zeigen. Da die Phasenkohärenz bei der Überlagerung der Feldstärken vielfachreflektierter Strahlanteile dann keine Rolle mehr spielt, spricht man auch von „inkohärenter“ Überlagerung der Strahlanteile, und bezüglich der Grenzschichtwirkung tritt an die Stelle der Stetigkeitsbedingung für die Transversalkomponenten der elektrischen bzw. magnetischen Feldstärken der Eigenmoden die Stetigkeitsbedingung für die Normalkomponenten der Strahlungsflußdichten der Eigenmoden.

Im Rahmen der normalen Interferenzoptik, d. h. im Fall der magnetischen Induktion $B = 0$, ist dieser Sachverhalt hinreichend geläufig. Für die Berechnung und Analyse der resultierenden Transmissions- und Reflexionsgrade bei inkohärenter Vielfachreflexion liegt das entsprechende Matrizenverfahren vor [2].

Die resultierende Faraday-Drehung unter dem Einfluß der Interferenz aufgrund der Vielfachreflexion, also bezogen auf den kohärenten Fall, ist im Bereich der Mikrowellentechnik bereits 1964 von Donovan und Medcalf unter Verwendung von Computern berechnet worden [3]. Nachfolgearbeiten von R. F. O'Connell und G. L. Wallace [4, 5] befaßten sich 1981 bzw. 1983 in entsprechender Weise mit der Drehung und Elliptizität beim Faraday-Effekt bei kohärenter Vielfachreflexion.

Die korrekte Behandlung der mo Effekte im Falle kohärenter Vielfachreflexion mit Hilfe eines geeigneten Matrizenkalküls ist an anderer Stelle erschöpfend angegeben worden [6], wobei – wie auch hier zunächst ins Auge gefaßt – dort eine Beschränkung insofern belassen wurde, als sich die angegebenen Rechnungen auf senkrechte Lichtinzidenz und Parallelität zwischen Flächennormale bzw. Inhomogenitätsgradient und Magnetfeldrichtung beziehen.

Die vorliegende Arbeit in ihren beiden Teilen befaßt sich mit dem speziellen Problemkreis der Situation der in(!)kohärenten Vielfachreflexion im Fall des Faraday- und mo Kerr-Effektes. Auch hier geht es um Berechnungs- und Analyseverfahren, wobei ebenfalls ganze Schichtsysteme erfaßt werden sollen.

Es sei erwähnt, daß bei dem Vorliegen einer inkohärenten Vielfachreflexion die spektrale Abhängigkeit des Faraday-Effektes meistens qualitativ und in grober Näherung auch quantitativ dem Fall des einmaligen Lichtdurchganges durch die Schicht bzw. das Schichtpaket entspricht. Beim mo Kerr-Effekt ergeben sich jedoch i. allg. größere qualitative und quantitative Abweichungen. Es fehlen aber, wie gesagt, die ansonsten charakteristischen Interferenzstrukturen, so daß die Existenz des Einflusses von inkohärenter Vielfachreflexion auf den ersten Blick u. U. nicht erkennbar ist.

Wie noch dargelegt werden wird, tritt bei der inkohärenten Superposition von Strahlanteilen der rechts- bzw. links-zirkularen Eigenmoden die Komplikation hinzu, daß die experimentell ermittelten Werte für die Faraday- und die mo Kerr-Elliptizität vom verwendeten Meßverfahren und der damit verbundenen, unterschiedlichen Definition der mo Elliptizität abhängen. D. h., die Zahlenwerte der gemessenen Elliptizität hängen davon ab, ob man den Polarisationszustand der resultierenden Strahlung mit Hilfe einer Analysatordrehung bestimmt („AD-Methode“), oder ob man das Verfahren der rechts-/links-zirkularen Polarisationsmodulation anwendet („ZPM-Methode“). Im ersten Fall breiten sich stets die beiden Eigenmoden simultan in dem Medium aus, während sie sich im zweiten Fall isoliert, weil zeitgleich getrennt, ausbreiten.

Diejenigen Meßverfahren, die bei feststehendem Analysator die Orientierung des elektrischen Feldvektors von linear-polarisierter Strahlung modulieren („LPM-Methode“; siehe dazu z. B. [7]) verwenden im Prinzip dennoch eine AD-Methode, denn auch hier breiten sich die beiden Eigenmoden simultan in der Probe aus, und die detektierte Strahlungsintensität hängt in analoger Weise vom Winkel zwischen der Orientierung der großen Halbachse des austretenden elliptisch-polarisierten Lichtes bzw. zwi-

schen der Orientierung der Richtung zur maximalen Strahlungsflußdichte und der Analysatororientierung ab. – Die LPM-Methode erlaubt jedoch die Anwendung der Lock-in-Technik zur Demodulation und führt dadurch zu einem besseren Signal-Rausch-Verhältnis.

In den folgenden Rechnungen wird vorausgesetzt, daß der Analysator einen Polarisationsgrad von 100 % besitzt. Auf die Fehler, die bei der Messung der mo Effekte mit einem nicht-perfekten Analysator entstehen, hat B. Johnson hingewiesen [8].

Es wird ferner in den folgenden Rechnungen vorausgesetzt, daß bei der ZPM-Methode die primär eingestrahnten Strahlungsflüsse bzw. Strahlungsflußdichten für die beiden Eigenmoden $\Phi(\text{eing},+)$ und $\Phi(\text{eing},-)$ gleich groß oder in den relevanten Formeln entsprechend normiert sind.

Das resultierend transmittierte Licht („scheinbarer Faraday-Effekt“) oder resultierend reflektierte Licht („scheinbarer mo Kerr-Effekt“) tritt in der Messung stets, also auch bei existierender in(!)kohärenter Vielfachreflexion (zur Beweisführung s. [1]), als elliptisch polarisiert (unter Einschluß der Extremfälle der linearen bzw. zirkularen Polarisation) auf. Ein rotierender Analysator liefert nun grundsätzlich die mo Drehung und mo Elliptizität aus einer reinen Messung der Strahlungsintensität bzw. der Strahlungsflußdichte F als Funktion seines Drehwinkels α . Es gilt deshalb für die entsprechende „AD-Winkelcharakteristik“ $F(\vartheta, \alpha)$ sowohl im kohärenten als auch im inkohärenten Fall:

$$F(\vartheta, \alpha) = \frac{F(\text{max})+F(\text{min})}{2} - \frac{F(\text{max})-F(\text{min})}{2} \cdot \cos [2 \cdot (\vartheta - \alpha)] \quad (1, 7)$$

Die mo Drehung und die mo Elliptizität ergeben sich daraus als „Meßresultat“ zu:

$$\vartheta(\text{AD}) = \alpha(F = F(\text{max})); \quad \varepsilon(\text{AD}) = \sqrt{\frac{F(\text{min})}{F(\text{max})}}$$

$$\text{mit } F(\text{max}) = F[(\vartheta - \alpha) = 0] \quad (1, 8)$$

$$F(\text{min}) = F[(\vartheta - \alpha) = \frac{\pi}{2}]$$

analog für η und ζ

Die Relationen zu den existierenden Feldstärken der (+)- und (-)-Mode sind jedoch im kohärenten und inkohärenten Fall unterschiedlich: Im kohärenten Fall liegt eine resultierende Feldstärke $\hat{E}(\text{res},+)$ bzw. $\hat{E}(\text{res},-)$ vor und es gilt Gl. (I, 3). Im inkohärenten Fall jedoch kann man die Winkelcharakteristik $F(\vartheta, \alpha)$ nur mittels äquivalenter Feldstärkenbeträge $E(\text{äqui},+)$ bzw. $E(\text{äqui},-)$ „interpretieren“. Diese Äquivalentfeldstärken existieren nicht als isolierte Moden, sie sind vielmehr lediglich die Parameter der Flußcharakteristik. Diese lassen sich berechnen aufgrund der Beziehung:

$$\begin{aligned} F(\text{max}) &= [E(\text{äqui},+) + E(\text{äqui},-)]^2 \\ F(\text{min}) &= [E(\text{äqui},+) - E(\text{äqui},-)]^2 \end{aligned} \quad (1, 9)$$

Man erhält:

$$E(\text{äqui},+) = \sqrt{\sqrt{\left(\frac{P}{2}\right)^2 - \left(\frac{Q}{2}\right)^2} + \frac{P}{2}} \quad (1, 10)$$

$$E(\ddot{a}qui,-) = \frac{Q}{2 \cdot E(\ddot{a}qui,+)}$$

$$\text{mit } P = \frac{F(\max) + F(\min)}{2} \quad (I, 10)$$

$$Q = \frac{F(\max) - F(\min)}{2}$$

Mit Hilfe dieser „Äquivalentfeldstärken“ $E(\ddot{a}qui,+)$ und $E(\ddot{a}qui,-)$ läßt sich die AD-Winkelcharakteristik in der gleichen mathematischen Form schreiben, wie sie im „kohärenten Fall“ mit den „resultierenden Feldstärken“ $E(\text{res},+)$ und $E(\text{res},-)$ auftritt:

$$F(\vartheta, \alpha) = [E(\ddot{a}qui,+)]^2 + [E(\ddot{a}qui,-)]^2 - 2 \cdot E(\ddot{a}qui,+) \cdot E(\ddot{a}qui,-) * \quad (I, 11)$$

Die inkohärente mo Elliptizität in der AD-Methode $\epsilon(\text{ik}, \text{AD})$ [vgl. Gl. (I,8)] läßt sich nun ebenfalls mit Hilfe der Äquivalentfeldstärken ausdrücken:

$$\epsilon(\text{ik}, \text{AD}) = \sqrt{\frac{F(\min)}{F(\max)}} = \frac{E(\ddot{a}qui,+) - E(\ddot{a}qui,-)}{E(\ddot{a}qui,+) + E(\ddot{a}qui,-)} \quad (I, 12)$$

Wird jedoch das Meßverfahren der ZPM-Methode zur Bestimmung der Elliptizität gewählt, so wird die mo Elliptizität $\epsilon(\text{ik}, \text{ZPM})$ bzw. $\zeta(\text{ik}, \text{ZPM})$ berechnet aus den resultierenden inkohärenten Einzelflußdichten $\Phi(\text{ik}, \text{res},+)$ und $\Phi(\text{ik}, \text{res},-)$, die mit Hilfe der Intensitätsmodulation bei jeweils fester (+)- und (-)-zirkularer Polarisation bestimmt werden,

$$\epsilon(\text{ik}, \text{ZPM}) = \frac{\sqrt{\Phi(\text{ik}, \text{res},+)} - \sqrt{\Phi(\text{ik}, \text{res},-)}}{\sqrt{\Phi(\text{ik}, \text{res},+)} + \sqrt{\Phi(\text{ik}, \text{res},-)}} \quad (I, 13)$$

$$\text{für } \Phi(\text{eing},+) = \Phi(\text{eing},-)$$

und auf diese Weise „scheinbare“, resultierende Feldstärken $E(\text{sim},+)$ und $E(\text{sim},-)$ liefern:

$$E(\text{sim},+) = \sqrt{\Phi(\text{ik}, \text{res},+)}$$

$$E(\text{sim},-) = \sqrt{\Phi(\text{ik}, \text{res},-)}$$

Die so gewonnenen scheinbaren Feldstärken sind insofern nur scheinbar, als die Einzelfeldstärken der jeweiligen Strahlanteile nicht(!) kohärent zu einer resultierenden Feldstärke interferieren. Insofern handelt es sich auch hier nur um „flußäquivalente“ Feldstärken.

Eine „Verknüpfung“ der einen Mode mit der anderen, wie es die AD-Methode im Meßresultat liefert, tritt im Fall der ZPM-Methode gar nicht auf.

Es sei bemerkt, daß im Falle der Anwendung der ZPM-Methode i. allg. mit Gewinn an Genauigkeit eine Modulationstechnik mit Lock-in-Demodulation angewandt wird. Dabei werden jedoch nicht die Intensitäten bei fester (+)- bzw. (-)-zirkularer Polarisation moduliert, sondern die zirkulare Polarisationsrichtung selbst periodisch gewechselt. Die

Differenz im Zähler der Gl. (I, 13) wird dann auf den direkt gemessenen Modulationshub $\Delta\Phi(\text{ik,res}) = [\Phi(\text{ik,res},+) - \Phi(\text{ik,res},-)]$ zurückgeführt, und es gilt:

$$\varepsilon(\text{ik,ZPM}) = \frac{\Delta\Phi(\text{ik,res})}{\Phi(\text{ik,res},+) + \Phi(\text{ik,res},-) + 2 \cdot \sqrt{\Phi(\text{ik,res},+) \cdot \Phi(\text{ik,res},-)}} \quad (\text{I, 15})$$

$$\text{für } \Phi(\text{eing},+) = \Phi(\text{eing},-)$$

Mit Hilfe des bekannten Matrizenverfahrens für Strahlungsflußdichten im feldfreien Fall [2], je getrennt durchgeführt für die (+)- und (–)-Polarisation, kann in diesem Fall der Polarisationsstrennung bzw. der ZPM-Methode die resultierende m_0 Elliptizität in Transmission und Reflexion exakt berechnet werden, da sich die Eigenmoden nur getrennt ausbreiten.

Der quantitative Unterschied beider Meßverfahren (AD und ZPM) bezüglich der Bestimmung der Elliptizitätswerte bei inkohärenter Vielfachreflexion [vgl. Gl. (I, 12) und Gl. (I, 13)] entsteht dadurch, daß i. allg. $E(\text{äqui},+) \neq E(\text{sim},+)$ und $E(\text{äqui},-) \neq E(\text{sim},-)$ sind. Dies wiederum liegt daran, daß bei der inkohärenten Addition von elliptisch „polarisierten“ Anteilen von Flußdichtecharakteristiken $F(m, \vartheta(m), \alpha)$; $m = 1, 2, 3, \dots$ [entsprechend Gl. (I. 7)] unterschiedliche Drehwinkel $\vartheta(m)$ auftreten (vgl. dazu auch die Ausführungen in Teil I der Arbeit).

Insofern existieren also i. allg. zwei unterschiedliche m_0 Faraday-Elliptizitätswerte im Fall der inkohärenten Vielfachreflexion:

$$\varepsilon(\text{ik,AD}) \neq \varepsilon(\text{ik,ZPM}).$$

Im Fall kohärenter Überlagerung vielfachreflektierter Strahlanteile ist jedoch stets (vgl. Anhang [A/1]):

$$\varepsilon(\text{koh,AD}) = \varepsilon(\text{koh,ZPM}).$$

Das Entsprechende gilt für die m_0 Kerr-Elliptizität ζ .

Dabei liefert der kohärente Überlagerungsfall natürlich i. allg. einen Wert, der bei der gleichen Probe seinerseits von den beiden inkohärenten Elliptizitätswerten verschieden ist.

Ein kontinuierlicher Wechsel zwischen dem Fall der „kohärenten“ und der „inkohärenten“ Vielfachreflexion läßt sich z. B. provozieren, indem man im Experiment die spektrale Spaltbreite bei sonst unveränderten Versuchsbedingungen variiert. – Im Anhang [A/2] ist ein entsprechendes Zahlenbeispiel zur Erläuterung der unterschiedlichen Resultate angeführt. Die zur Diskussion stehenden Elliptizitätswerte können sich demnach um Größenordnungen und auch im Vorzeichen unterscheiden!

In einer früheren Publikation (H. Piller, 1966) wurde zur Berechnung ausschließlich der m_0 Drehung unter Berücksichtigung der kohärenten bzw. auch der inkohärenten Vielfachreflexion eine Reihendarstellung angegeben [9]. Dabei wurden jedoch sowohl die Elliptizitätseffekte aufgrund des zirkularen Dichroismus als auch der m_0 Grenzflächeneinfluß außer Betracht gelassen. Letzteres bedeutet, daß der bei der Vielfachreflexion sowohl in bezug auf die Transmission als auch in bezug auf die Reflexion der Strahlanteile wirksam werdende m_0 Kerr-Effekt gar nicht berücksichtigt ist.

In dem vorangegangenen Teil I zu der vorliegenden Problematik wurde ein „Iterationsverfahren“ angegeben, mit dessen Hilfe die resultierenden m_0 Effekte sowohl mit kohärenter als auch mit inkohärenter Vielfachreflexion in Transmission und in Reflexion korrekt berechnet werden können [1]. Dieses Computer-gestützte Iterationsverfahren addiert sukzessive die vielfachreflektierten Amplitudenanteile der rechts- bzw. linkszirkularen Moden bzw. die mit der Charakteristik $F(m, \vartheta(m), \alpha)$ auftretenden Strahlungsflußdichteanteile und bildet analytisch streng das (meßbare) Polarisationsresultat. Dabei werden jeweils beide Fälle der Elliptizitätsmessung (AD-Methode und ZPM-Methode) erfaßt.

Dieses Iterationsverfahren ist insofern hinreichend genau, als die Strahlanteile soweit verfolgt werden können, daß jede reale Meßgenauigkeit „überboten“ werden kann.

Die korrekte Berücksichtigung der inkohärenten Vielfachreflexion bei den m_0 Größen, d. h. bei Drehung und Elliptizität, im Rahmen eines Matrizenverfahrens, ist bereits früher versucht worden [2]. Dabei wurde jedoch nicht auf die Veränderungen eingegangen, die bei der Elliptizitätsbestimmung als Folge der Verwendung unterschiedlicher Meßverfahren entstehen. Ferner wurde nicht hinreichend diskutiert, daß und in welcher Tragfähigkeit es sich bei der Matrizenberechnung der m_0 Drehung, die sich auf die dort angewandte LPM-Methode und damit prinzipiell auf die AD-Methode bezieht, um eine Näherung handelt. Insofern ist auch die dortige Aussage nicht korrekt, daß die Inkohärenz generell zu einer reinen „Mittelung“ über die im kohärenten Fall auftretenden Interferenzerscheinungen führt. Nachteil der dort angegebenen Matrizenrechnung ist ferner, daß sie zweifach, d. h. in je unterschiedlicher Weise für Drehung und Elliptizität durchgeführt werden muß. – Diese Kritik bezieht sich auch auf Teile einer später erschienenen Arbeit [10].

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit den noch offenen Problemen des inkohärenten Falles, d. h. mit der Frage der korrekten Berechnung der Drehung bzw. Elliptizität bei den m_0 Effekten bei inkohärenter Überlagerung der vielfachreflektierten Strahlanteile bei „Analysatordrehung (AD-Methode)“ bzw. bei der „zirkularen Polarisationsmodulation (ZPM-Methode)“. Dazu wird eine verbesserte Matrizenrechnung vorgestellt, die simultan, d. h. in einem Rechengang, Drehung und Elliptizität liefert. Dabei ist es möglich, ein ganzes Schichtensystem zu erfassen, bei dem u. U. Teile davon eine in sich kohärente Vielfachreflexion besitzen. Dazu wird der „Stapelanteil“ mit kohärenter Vielfachreflexion in einer geeigneten „inkohärenten m_0 Ersatz-Grenzschichtmatrix“ zusammengefaßt.

Diese Kombination von Stapelanteilen mit kohärenter und inkohärenter Vielfachreflexion entspricht z. B. den experimentell häufigen Fällen, bei denen dünne m_0 aktive Schichten (mit kohärenter Vielfachreflexion) auf dickeren, ebenfalls m_0 aktiven Substraten (mit inkohärenter Vielfachreflexion) präpariert sind. Gleichermaßen können auf diese Weise optisch inhomogene Systeme modellartig dargestellt werden, wenn die Profildfunktion der optischen bzw. m_0 Konstanten bekannt ist (vgl. dazu z. B. [11, 12]). Diese Darstellung stützt sich dann auf eine hinreichend feine Schichtunterteilung des Systems (oder von Teilen daraus) derart, daß innerhalb jeder Schicht Homogenität und Kohärenz vorausgesetzt werden kann.

II Allgemeines zur Matrizenrechnung für Schichtsysteme

Im magnetfeldfreien Fall erlaubt es die Matrizenrechnung in der Anwendung auf ein planparalleles Schichtsystem (s. Abb. 1), einen Eingangsvektor mit den Komponenten $L(A, \rightarrow)$ und $L(A, \leftarrow)$ einer hinlaufenden bzw. rücklaufenden Welle im Eingangsmedium

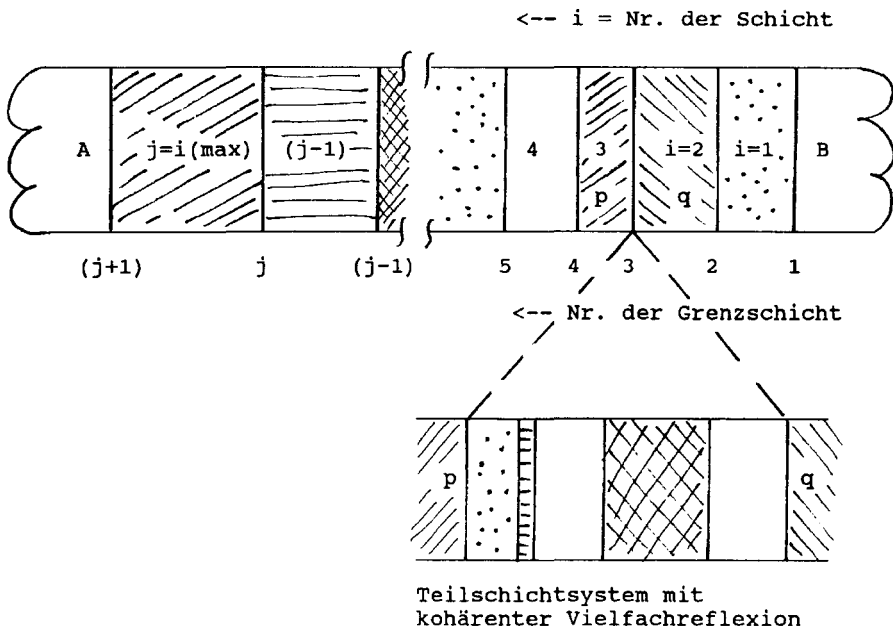


Abb. 1: Skizze zur Erläuterung des Schichtsystems und dessen Kennzeichnung im Rahmen der Matrizenrechnungen: A und B sind rückwirkungsfreie Eingangs- bzw. Abschlußmedien, die als unendlich ausgedehnt vorausgesetzt werden. Das Teilschichtsystem von p bis q (unterer Teil der Skizze), in dem kohärente Vielfachreflexion herrscht, wird in dem Schichtsystem von $j = i(\max)$ bis 1, in dem ansonsten inkohärente Vielfachreflexion vorliegt, durch eine „Ersatz-Grenzschichtmatrix“ (im Beispiel der Skizze anstelle der Grenzschicht Nr. 3; mit $p = 3$ und $q = 2$) vertreten. – Weitere Erläuterungen siehe Text.

„A“ mit einem entsprechenden Ausgangsvektor im Abschlußmedium „B“ mit den Komponenten $L(B, \rightarrow)$ und $L(B, \leftarrow)$ durch eine resultierende 2×2 Matrix $\|M(\text{res}, A \rightarrow B)\|$ zu verbinden:

$$\begin{pmatrix} L(A, \rightarrow) \\ L(A, \leftarrow) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|M(\text{res}, A \rightarrow B)\| \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} L(B, \rightarrow) \\ L(B, \leftarrow) \end{pmatrix} \quad (\text{II, 1})$$

Die resultierende Matrix $\|M(\text{res}, A \rightarrow B)\|$ ist dabei das geordnete Produkt der entsprechenden Grenzschichtmatrizen $\|G(i)\|$ und Volumenmatrizen $\|V(i)\|$ der Schichtgrenzen bzw. Einzelschichten:

$$\|M(\text{res}, A \rightarrow B)\| = \|G(j+1)\| * \|(V(j))\| * \|(G(j))\| * \|(V(j-1))\| * \|(G(j-1))\| * \dots * \|(V(1))\| * \|G(1)\| \quad (\text{II}, 2)$$

Die Medien „A“ (entsprechend $i = j + 1$) und „B“ (entsprechend $i = 0$) sind beide als „unendlich ausgedehnt“, d. h. als optisch rückwirkungsfrei vorausgesetzt.

Im kohärenten Fall ist „L“ z. B. die komplexe elektrische Feldstärke „E“ der elektromagnetischen Welle, im inkohärenten Fall jedoch die reelle Flußdichte Φ dieser Welle. Entsprechend sind die Koeffizienten der Grenzschichtmatrizen Kombinationen der komplexen Amplitudenfaktoren für Transmission und Reflexion bzw. Kombinationen der reellen Flußgrößen für Transmission und Reflexion.

Die Volumenmatrizen enthalten den komplexen Volumenschwächungsfaktor $\tilde{s}(i)$ bzw. den reellen Volumenschwächungsgrad $S(i)$ der jeweiligen Schicht.

Reduziert man die Eingangs- und Ausgangsvektoren auf $L(A, \rightarrow)$ und steht die Lichtquelle im Medium „A“, so ergeben sich im kohärenten Fall die Vektoren $[1, \tilde{t}(A \rightarrow B)]$ als Eingangs- und $[\tilde{t}(A \rightarrow B), 0]$ als Ausgangsvektor mit dem komplexen resultierenden Reflexionsfaktor $\tilde{r}(A \rightarrow B)$ und dem resultierenden komplexen Transmissionsfaktor $\tilde{t}(A \rightarrow B)$.

Entsprechend ergeben sich im inkohärenten Fall die Vektoren $[1, \bar{R}(A \rightarrow B)]$ und $[\bar{T}(A \rightarrow B), 0]$ mit dem resultierenden reellen Reflexionsgrad $\bar{R}(A \rightarrow B)$ und dem resultierenden reellen Transmissionsgrad $\bar{T}(A \rightarrow B)$.

Die Feldstärken-Grenzschichtmatrix $\|G[E, i \rightarrow (i-1)]\|$ lautet beim Übergang von der Schicht „i“ zur Schicht „(i-1)“

$$\|G[E, i \rightarrow (i-1)]\| = \frac{1}{\tilde{t}[i \rightarrow (i-1)]} * \begin{vmatrix} 1 & \tilde{r}[i \rightarrow (i-1)] \\ \tilde{r}[i \rightarrow (i-1)] & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{II}, 3)$$

Die dort auftretenden komplexen Amplitudenfaktoren $\tilde{t}[i \rightarrow (i-1)]$ und $\tilde{r}[i \rightarrow (i-1)]$ stehen mit den komplexen Brechzahlen der beteiligten Schichten in folgendem Zusammenhang:

$$\begin{aligned} \tilde{t}[i \rightarrow (i-1)] &= \frac{2 \cdot \tilde{n}(i)}{\tilde{n}(i) + \tilde{n}(i-1)} \\ \tilde{r}[i \rightarrow (i-1)] &= \frac{\tilde{n}(i) - \tilde{n}(i-1)}{\tilde{n}(i) + \tilde{n}(i-1)} \end{aligned} \quad (\text{II}, 4)$$

Dabei ist vorausgesetzt, daß in allen Medien die komplexe relative magnetische Permeabilität $\tilde{\mu}(\text{rel}) = 1$ ist. Ist das nicht der Fall, so sind in Gl. (II, 4) die komplexen Brechzahlen durch den Kehrwert der jeweiligen komplexen Wellenwiderstände $\tilde{Z}(i)$

$$\tilde{Z}(i) = Z_0 \cdot \sqrt{\tilde{\mu}(\text{rel}, i) / \tilde{\epsilon}(\text{rel}, i)} \quad (\text{II}, 5)$$

$$\text{mit } Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$$

zu ersetzen. Z_0 ist dabei der Wellenwiderstand des Vakuums.

Die Amplituden-Volumenmatrix $\|V(E,i)\|$ der Schicht „i“ mit der Dicke $d(i)$ lautet

$$\|V[E,i]\| = \tilde{s}(i) * \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & [\tilde{s}(i)]^{-2} \end{vmatrix} \quad (\text{II, 6})$$

mit $\tilde{s}(i) = \exp\left[i \cdot \frac{\omega}{c} \cdot d(i) \cdot \tilde{n}(i)\right]$.

Für die Einzelgrenzschicht beim Übergang von der Schicht „i“ nach „(i – 1)“ lautet die Fluß-Grenzschichtmatrix $\|G[\Phi,i \rightarrow (i - 1)]\|$ im feldfreien Fall:

$$\|G[\Phi,i \rightarrow (i - 1)]\| = \frac{1}{T[i \rightarrow (i - 1)]} * \begin{vmatrix} 1 & -R[i \rightarrow (i - 1)] \\ R[i \rightarrow (i - 1)] & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{II, 7})$$

Die dort auftretenden reellen Flußrelationen $T[i \rightarrow (i - 1)]$ und $R[i \rightarrow (i - 1)]$ stehen mit den komplexen Brechzahlen der beteiligten Schichten in dem Zusammenhang:

$$T[i \rightarrow (i - 1)] = \left| \frac{2 \cdot \tilde{n}(i)}{\tilde{n}(i) + \tilde{n}(i - 1)} \right|^2 * \frac{\operatorname{Re}[\tilde{n}(i - 1)]}{\operatorname{Re}[\tilde{n}(i)]} \quad (\text{II, 8})$$

$$R[i \rightarrow (i - 1)] = \left| \frac{\tilde{n}(i) - \tilde{n}(i - 1)}{\tilde{n}(i) + \tilde{n}(i - 1)} \right|^2$$

Die Fluß-Volumenmatrix $\|V(\Phi,i)\|$ der Schicht „i“ lautet, ebenfalls im feldfreien Fall:

$$\|V[\Phi,i]\| = S(i) * \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & [S(i)]^{-2} \end{vmatrix} \quad (\text{II, 9})$$

mit $S(i) = \exp\left[2 \cdot \frac{\omega}{c} \cdot k(i) \cdot d(i)\right]$.

Es sei dazu bemerkt, daß sich im Matrizenprodukt das Produkt der „Medienfaktoren“ $\operatorname{Re}[\tilde{n}(i - 1)]/\operatorname{Re}[\tilde{n}(i)]$ in (II, 8) auf den verbleibenden Faktor $\operatorname{Re}[\tilde{n}(B)]/\operatorname{Re}[\tilde{n}(A)]$ reduziert. – Auch hier sind im Fall $\tilde{\mu}(\text{rel}) \neq 1$ die komplexen Brechzahlen in Gl. (II, 8) durch den Kehrwert der komplexen Wellenwiderstände zu ersetzen.

Im magnetooptischen Fall sind die Größen bzw. Matrizen je mit den Brechungsindizes $n(i,+)$ und $n(i,-)$, d. h. für jede Eigenmode getrennt zu bilden und in einem eigenen Rechengang zu verarbeiten.

Bezüglich der Begründungen der angegebenen Formeln und der näheren Rechengänge sei auf die Literatur [2] verwiesen. – Es sei dazu noch bemerkt, daß im kohärenten Fall in äquivalenter Weise statt mit den elektrischen Feldstärken E einer hin- und einer rücklaufenden Welle auch mit einer nur hinlaufenden elektrischen Feldstärke und einer nur hinlaufenden magnetischen Feldstärke gerechnet werden kann [11, 12].

Bei der hier zum Zuge kommenden Matrizenrechnung handelt es sich in allen Fällen um eine „lineare Rechnung“, so wie es auch notwendige physikalische Voraussetzung

ist, daß die Materie, in der sich die Wellen ausbreiten, „optisch linear“ ist. D. h., die Brechzahlen der beteiligten Materialien dürfen nicht selbst von der Feldstärke bzw. Flußdichte der elektromagnetischen Welle abhängen. Damit hängen auch die Amplitudenfaktoren bzw. die auf die Flußdichte bezogenen Werte des Transmissionsgrades und Reflexionsgrades nicht von den effektive vorliegenden Amplituden- bzw. Flußwerten ab. Das gilt für jede Einzelschicht und damit dann auch für die resultierenden Größen des Schichtsystems.

Es ist zu bemerken, daß sich die angegebenen Grenzschichtmatrizen Gl. (II, 3) und Gl. (II, 7) auf benachbarte und homogene Medien beziehen, denn bei der Ableitung ist bereits von den aus Gl. (II, 4) bzw. Gl. (II, 8) folgenden Symmetrierelationen Gebrauch gemacht worden. Diese lauten:

$$\begin{aligned}
 \bar{r}[(i-1) \rightarrow i] &= -\bar{r}[i \rightarrow (i-1)] \\
 \bar{t}[(i-1) \rightarrow i] &= 2 - \bar{t}[i \rightarrow (i-1)] \\
 \bar{t}[i \rightarrow (i-1)] &= 1 + \bar{r}[i \rightarrow (i-1)] \\
 \bar{t}[i \rightarrow (i-1)] \cdot \bar{t}[(i-1) \rightarrow i] - \bar{r}[i \rightarrow (i-1)] \cdot \bar{r}[(i-1) \rightarrow i] &= 1 \\
 &\dots\dots\dots \\
 R[(i-1) \rightarrow i] &= R[i \rightarrow (i-1)] \\
 T[(i-1) \rightarrow i] &= T[i \rightarrow (i-1)] * \frac{\operatorname{Re} \{ \bar{n}(i) \} \cdot | \bar{n}(i-1) |}{| \bar{n}(i) | \cdot \operatorname{Re} \{ \bar{n}(i-1) \}}
 \end{aligned} \tag{II, 10}$$

III Matrizenrechnung zur AD-Methode

Die bereits im Teil I der Arbeit getroffene Feststellung, daß sich bei der Existenz von mehrfachreflektierten Strahlungsflußanteilen, die einzeln mit der Winkelcharakteristik $F(m, \rightarrow \text{ bzw. } \leftarrow, \vartheta(m), \alpha)$ in der gleichen Ausbreitungsrichtung erscheinen, in der Überlagerung eine einzige Winkelcharakteristik gleicher Form ergibt, legt es nahe, anzunehmen, daß auch in diesem Fall der AD-Methode eine Matrizenrechnung geeignet ist, einen Eingangsvektor mit den beiden Komponenten $F(A, \rightarrow, \vartheta(A), \alpha)$ und $F(A, \leftarrow, \vartheta(A), \alpha)$ mit einem Ausgangsvektor mit den beiden Komponenten $F(B, \rightarrow, \vartheta(B), \alpha)$ und $F(B, \leftarrow, \vartheta(B), \alpha)$ zu verbinden.

Man kann zunächst in diesem Sinne die „Transformationsbeziehung“ für die Richtung (\rightarrow) ausrechnen, die die Winkelcharakteristik an der Frontseite einer Schicht mit der an der Rückseite verbindet. Handelt es sich dabei um eine lineare Beziehung, also um einen „Transmissionsfaktor“, so wäre der Wert dieses Faktors gleich dem Koeffizienten $v(2,2)$ und dessen Kehrwert gleich dem Koeffizienten $v(1,1)$ der Volumenmatrix. Da im übrigen $v(1,2) = v(1,2) = 0$ gilt, wäre die Volumenmatrix damit gegeben.

Die Berechnung einer derartigen Transformationsbeziehung gelingt unter Verwendung der Äquivalentfeldstärken für die (+)- und (-)-Eigenmode. Diese Äquivalentfelder ändern sich im Volumen über der Distanz $d(i)$ dem Betrage nach um den Faktor $\sigma(i, \pm)$:

$$\sigma(i, \pm) = \exp \left[\frac{\omega}{c} \cdot d(i) \cdot k(i, \pm) \right] \quad (\text{III, 1})$$

Zusätzlich erhöht sich der Drehwinkel $\vartheta(i)$ um den Wert:

$$\Delta\vartheta(i) = \frac{\omega}{2 \cdot c} \cdot d(i) [n(i, +) - n(i, -)] \quad (\text{III, 2})$$

Damit ergeben sich für die Winkelcharakteristik an der Rückseite („Rück“) folgende Zusammenhänge, wenn die Größen an der Vorderseite mit der Kennung „Front“ bezeichnet werden [zu den Bezeichnungen siehe im übrigen Gl. (I, 9) und Gl. (I, 10)]:

$$1.) \quad Q(i, \text{Rück}) = Q(i, \text{Front}) * \sigma(i, +) * \sigma(i, -)$$

$$2.) \quad \vartheta(i, \text{Rück}) = \vartheta(i, \text{Front}) + \Delta\vartheta(i)$$

$$3.) \quad P(i, \text{Rück}) = [U \cdot \sigma(i, +)]^2 + \left[\frac{Q(i, \text{Front}) * \sigma(i, -)}{2 \cdot U} \right]^2 \quad (\text{III, 3})$$

$$\text{mit} \quad U = \sqrt{\sqrt{[P(i, \text{Front})/2]^2 - [Q(i, \text{Front})/2]^2} + P(i, \text{Front})/2}$$

Danach ist festzustellen:

- 1) Für die Größe Q ergibt sich eine multiplikative, d. h. lineare Beziehung.
- 2) Die Erhöhung des Drehwinkels läßt sich ebenfalls multiplikativ erfassen, und zwar durch Einführung der komplexen Größe \tilde{Q} , so daß die Schreibweise der Winkelcharakteristik [vgl. Gl. (I, 7) mit Gl. (I, 10)] in die folgende Form übergeht:

$$F(i, \text{Rück}, \vartheta, \alpha) = P(i, \text{Rück}) - \text{Re}[\tilde{Q}(i, \text{Rück})]$$

$$\text{mit} \quad \tilde{Q}(i, \text{Rück}) = Q(i, \text{Rück}) \cdot \exp[i \cdot 2 \cdot (\vartheta + \Delta\vartheta - \alpha)], \quad (\text{III, 4})$$

d.h. es ist

$$\tilde{Q}(i, \text{Rück}) = \tilde{Q}(i, \text{Front}) * \sigma(i, +) * \sigma(i, -) * \exp[i \cdot 2 \cdot \Delta\vartheta]$$

- 3) Für die Größe P existiert nach Ausweis von Gl. (III, 3) jedoch keine lineare Beziehung zwischen $P(\text{Rück})$ und $P(\text{Front})$.

Damit ist eine Matrizenrechnung nach der Art der Anwendung auf ein Schichtsystem im feldfreien Fall allein aufgrund Punkt 3) dieser Betrachtungen zur Volumenmatrix nicht möglich, und es erübrigt sich, mit Hilfe der Äquivalentfelder eine analoge Diskussion bezüglich der Grenzschichtmatrix zu führen. Man muß demnach feststellen:

- a) Die Anwendung einer geschlossenen Matrizenrechnung zur Berechnung der mo Effekte bei inkohärenter Teilstrahlüberlagerung und bei Anwendung der AD-Methode zur Bestimmung der mo Drehung und (!) Elliptizität ist nicht möglich.
- b) Diese Feststellung beweist sich allein aus der Tatsache, daß die im Abschnitt II vorgestellten Prinzipien einer Matrizenrechnung zur Erfassung eines Schichtsystems grundsätzlich zu einer „linearen Operation“ führen, die Übertragung der inkohärenten Winkelcharakteristik jedoch eine nichtlineare Operation darstellt.

IV Matrizenrechnung zur ZPM-Methode

a) Elliptizität

Bei der Meßmethode der zirkularen Polarisationsmodulation (ZPM) breiten sich die rechts- und linkszirkular polarisierte Eigenmode des Lichtes zeitlich getrennt in der Probe aus. Die im Magnetfeld durch den mo Dichroismus bei der Einstrahlung von linear-polarisiertem Licht auftretende Elliptizität ist nur daran zu erkennen, daß die austretenden Strahlungsflußdichten der beiden Eigenmoden bei gleicher eingestrahelter Strahlungsflußdichte ungleich werden. Die mo Elliptizität bestimmt sich dann quantitativ nach Gl. (I, 13). Die der mo Drehung zuzuordnenden Phasenunterschiede zwischen den beiden Eigenmoden spielen dabei keine Rolle.

Dementsprechend kann die Bestimmung der Elliptizität sowohl im Fall der kohärenten als auch im Fall der inkohärenten Vielfachreflexion mit den Matrizenrechenverfahren der feldfreien Situation erfolgen, indem eine zweifache Rechnung durchgeführt wird unter Verwendung jeweils der relevanten komplexen mo Brechzahl $\tilde{n}(+)$ bzw. $\tilde{n}(-)$.

Im kohärenten Fall bezieht sich die Matrizenrechnung auf den komplexen resultierenden Transmissions- und Reflexionsfaktor in Bezug auf die (elektrischen) Feldstärken $\bar{i}(\text{koh}, A \rightarrow B, \pm)$ bzw. $\bar{r}(\text{koh}, A \rightarrow B, \pm)$. Die resultierenden und auf die Strahlungsflußdichten bezogenen Transmissions- und Reflexionsgrade $T(\text{koh}, A \rightarrow B, \pm)$ bzw. $\bar{R}(\text{koh}, A \rightarrow B, \pm)$ werden dann mit Hilfe der bekannten Beziehungen

$$\bar{T}(\text{koh}, A \rightarrow B, \pm) = \left| \bar{i}(A \rightarrow B, \pm) \right|^2 \cdot \frac{\text{Re} \left\{ \tilde{n}(B, \pm) \right\}}{\text{Re} \left\{ \tilde{n}(A, \pm) \right\}} \quad (\text{IV}, 1)$$

$$\bar{R}(\text{koh}, A \rightarrow B, \pm) = \left| \bar{r}(A \rightarrow B, \pm) \right|^2$$

gebildet, wobei $\tilde{n}(A, +)$ und $\tilde{n}(A, -)$ sowie $\tilde{n}(B, +)$ und $\tilde{n}(B, -)$ die komplexen mo Brechzahlen des Herkunfts- bzw. Abschlußmediums sind. In der Regel handelt es sich bei beiden Medien um Vakuum bzw. Luft unter Normaldruck, so daß in guter Näherung diese Brechzahlen reell gleich Eins angesetzt werden können. – In Gl. (IV, 1) ist, wie oben schon allgemein bemerkt, vorausgesetzt, daß die komplexe relative magnetische Permeabilität $\tilde{\mu}(\text{rel}, i)$ aller beteiligten Medien gleich Eins ist. Ist das im Einzelfall nicht gegeben, so ist die komplexe Brechzahl durch den Kehrwert des komplexen Wellenwiderstandes, hier jeweils für die (+)- und (-)-Mode, zu ersetzen.

Für die resultierenden kohärenten Elliptizitäten $\varepsilon(\text{koh}, \text{ZPM})$ bzw. $\zeta(\text{koh}, \text{ZPM})$ gilt dann gemäß Gl. (I, 2):

$$\varepsilon(\text{koh}, \text{ZPM}) = \frac{\sqrt{\bar{T}(\text{koh}, A \rightarrow B, +)} - \sqrt{\bar{T}(\text{koh}, A \rightarrow B, -)}}{\sqrt{\bar{T}(\text{koh}, A \rightarrow B, +)} + \sqrt{\bar{T}(\text{koh}, A \rightarrow B, -)}} \quad (\text{IV}, 2)$$

$$\zeta(\text{koh}, \text{ZPM}) = \frac{\sqrt{\bar{R}(\text{koh}, A \rightarrow B, +)} - \sqrt{\bar{R}(\text{koh}, A \rightarrow B, -)}}{\sqrt{\bar{R}(\text{koh}, A \rightarrow B, +)} + \sqrt{\bar{R}(\text{koh}, A \rightarrow B, -)}}$$

Im Fall der inkohärenten Vielfachreflexion ist die Matrizenrechnung, wie oben bereits ausgeführt (siehe Abschnitt II), bereits unmittelbar auf die Strahlungsflußdichten der Eigenmoden bezogen. Auch hier ist die Matrizenrechnung zweifach, d. h. je einmal für die (+)-Mode und die (–)-Mode auszuführen. Die in den Grenzflächenmatrizen [Gl. (II, 7)] auftretenden Transmissions- und Reflexionsgrade werden wiederum unter Verwendung der jeweiligen komplexen Brechzahlen für die (+)- bzw. (–)-Mode berechnet.

Die resultierenden *mo* Elliptizitäten des inkohärenten Faraday-Effektes und des inkohärenten *mo* Kerr-Effektes sind dann entsprechend Gl. (I, 13) unmittelbar gegeben durch die reellen resultierenden Transmissions- bzw. Reflexionsgrade für die (+)- und die (–)-Mode: $\bar{T}(ik, A \rightarrow B, \pm)$ bzw. $\bar{R}(ik, A \rightarrow B, \pm)$. Gl. (IV, 2) gilt dann entsprechend im inkohärenten Fall, wenn die Indizierung „koh“ durch „ik“ ersetzt wird.

Diese inkohärente Matrizenrechnung ist korrekt, führt aber nur zum Elliptizitätsresultat der ZPM-Methode. Die AD-Methode (s. Teil I der Arbeit) liefert aufgrund der andersartigen Messung bzw. Definition der *mo* Elliptizität [vgl. Gl. (I, 12) und Gl. (I, 13)] einen anderen Wert! Der Anhang [A, 3] enthält eine Beispielrechnung, die es erlaubt, die unterschiedlichen Elliptizitätsspektren $\epsilon(ik, ZPM)$ und $\epsilon(ik, AD)$ bzw. $\zeta(ik, ZPM)$ und $\zeta(ik, AD)$ in einem konkreten Fall zu vergleichen.

In dem gewählten Beispiel variieren spektral die Absorptionsindizes $k(+)$ und $k(-)$, sie nehmen mit wachsender Wellenlänge zu. Auf diese Weise kann verfolgt werden, daß bei hinreichend starker Absorption, die die Vielfachreflexion praktisch unwirksam werden läßt, die beiden resultierenden Elliptizitätswerte $\epsilon(ik, ZPM)$ und $\epsilon(ik, AD)$ bzw. $\zeta(ik, ZPM)$ und $\zeta(ik, AD)$ asymptotisch gleich groß werden.

b) Drehung

Bei der inkohärenten Vielfachreflexion ist die *mo* Drehung bei der Anwendung der Methode der zirkularen Polarisationsmodulation nicht meßbar, da vom Strahlungsempfänger nur abwechselnd Strahlungsflußdichten, sei es bei fester zirkularer Polarisierung getrennt oder bei (+)-(–)-Modulation die Differenz davon als Modulationshub, detektiert werden. Damit existiert keine Information über die Phasendifferenzen zwischen der (+)- und der (–)-Mode in den überlagerten Teilstrahlen oder in den „Äquivalentfeldstärken“ der Flußdichte-Winkelcharakteristik, wie sie bei der AD-Methode zugänglich ist.

Die Methode der zirkularen Polarisationsmodulation ist also zur Bestimmung der *mo* Drehung beim Faraday- bzw. *mo* Kerr-Effekt nicht relevant.

V Matrizenrechnung zur näherungsweise Bestimmung der inkohärenten *mo* AD-Drehung und der ZPM-Elliptizität

Die mit Hilfe des Iterationsverfahrens berechenbare *mo* Drehung bei Existenz von inkohärenter Vielfachreflexion, so wie sie bei Anwendung der AD-Methode meßtechnisch zugänglich ist, kann in sehr guter Näherung auch mit Hilfe einer Matrizenrechnung ermittelt werden. Damit besteht weiterhin auch die Möglichkeit, die Rechnung für ein beliebiges Schichtsystem durchzuführen, d. h. die beim Iterationsverfahren gegebene Be-

beschränkung auf eine planparallele Probenplatte mit inkohärenter Vielfachreflexion entfällt hier.

Zu diesem Näherungsverfahren wird die oben im Abschnitt IVa) geschilderte Matrizenrechnung, die sich dort zwar auf die inkohärente Vielfachreflexion, aber dabei nur auf die Strahlungsflußdichten und damit nur auf die Elliptizitäten bezieht, erweitert:

Den reellen Transmissions- und Reflexionsgraden in den Grenzschichtmatrizen der Einzelgrenzflächen und in den „Volumenschwächungsfaktoren“ der Volumenmatrizen der Einzelschichten [zur Definition siehe Gl. (II, 3) und Gl. (II, 4)] wird ein „Drehwinkelfaktor“ in komplexer Form angefügt, der ausschließlich, und das ist wesentlich für die Güte der Näherung (vgl. weiter unten), nur die *mo* Drehung aufgrund der *mo* Phasendifferenz der (+)- und (-)-Mode, jedoch nicht deren absolute Phase an der betreffenden Stelle enthält.

Die Strahlungsflußdichte „transportiert“ also auf diese Weise die *mo* Drehung. Dabei gewährleisten die Beträge der komplexen Transmissions- und Reflexionsgrade sowie der Volumenschwächung die richtige „Gewichtung“ der vielfachreflektierten Strahlenteile. Auf diese Weise wird z. B. richtig erfaßt, daß tiefergelegene Schichten trotz u. U. relativ großer *mo* Effekte dann beim *mo* Kerr-Effekt, also in Reflexion, relativ unwirksam bleiben, wenn oberflächennahe Schichten eine relativ starke Absorption besitzen.

Im Sinne der Ableitung des Matrizenformalismus aus Stetigkeitsbedingungen an Grenzflächen kann man sagen, daß mit der Stetigkeit der Flüsse nunmehr die Stetigkeit der *mo* Drehwinkel verknüpft ist.

Sind nur die beiden *mo* Brechungsindizes $\tilde{n}(+)$ und $\tilde{n}(-)$ der beteiligten Medien bekannt, so enthalten die komplexen *mo* Drehwinkelfaktoren [vgl. Gl. (V, 2)] zunächst je den halben *mo* Drehwinkel, wie er sich als die Hälfte der *mo* Phasendifferenz zwischen der (+)- und der (-)-Mode ergibt, wenn die entsprechenden komplexen Transmissions- und Reflexionsfaktoren sowie die optischen Wege berechnet werden. Bezeichnet man diese Einzel-Drehwinkel mit $\delta\tau$, $\delta\rho$, und $\delta\vartheta$, so gelten folgende Zusammenhänge:

$$\begin{aligned}\delta\tau[i \rightarrow (i-1)] &= \frac{1}{4} \cdot \left\{ \text{ARG}[\tilde{t}(i \rightarrow (i-1), +)] - \text{ARG}[\tilde{t}(i \rightarrow (i-1), -)] \right\} \\ \delta\rho[i \rightarrow (i-1)] &= \frac{1}{4} \cdot \left\{ \text{ARG}[\tilde{r}(i \rightarrow (i-1), +)] - \text{ARG}[\tilde{r}(i \rightarrow (i-1), -)] \right\} \quad (\text{V, 1}) \\ \delta\vartheta(i) &= \frac{90}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{\omega}{c} \cdot d(i) * [\tilde{n}(i, +) - \tilde{n}(i, -)] \\ &\delta\tau, \delta\rho \text{ und } \delta\vartheta \text{ in Grad}\end{aligned}$$

Gl. (V, 1) gilt auch für die (-)-Mode, jedoch sind dabei $\delta\tau$, $\delta\rho$ und $\delta\vartheta$ mit umgekehrtem Vorzeichen zu verwenden.

Ist neben den $\tilde{n}(+)$ und $\tilde{n}(-)$ jeweils auch der feldfreie Brechungsindex $\tilde{n}(B=0)$ der beteiligten Medien bekannt, so kann statt des halben *mo* Drehwinkels auch der jeweilige Drehwinkelanteil der (+)-Mode bzw. (-)-Mode bezogen auf den feldfreien Brechungsindex „transportiert“ werden. Grundsätzlich bestehen jedoch in dieser Hinsicht Bedenken, denn z. B. bei der Interband-Magnetooptik der Halbleiter basieren die *mo* Effekte auf der magnetischen Spinaufspaltung der Landau-Niveaus, die ihrerseits aber bei $B=0$

noch nicht existieren. Insofern ist der magnetooptische Bezugswert für den „feldfreien Fall“ nicht ohne weiteres gegeben.

Die in den Matrizen auftretenden nunmehr komplexen(!) Transmissions-, Reflexions- und Volumenschwächungsgrade \tilde{T} , \tilde{R} bzw. \tilde{S} haben dann die Werte:

$$\begin{aligned}\tilde{T}[i \rightarrow (i-1), +] &= T[i \rightarrow (i-1), +] * \exp(i * 2 \pi * \delta \tau / 360) \\ \tilde{R}[i \rightarrow (i-1), +] &= R[i \rightarrow (i-1), +] * \exp(i * 2 \pi * \delta \tau / 360) \\ \tilde{S}[i, +] &= S(i, +) * \exp(i * 2 \pi * \delta \vartheta / 360)\end{aligned}\quad (V, 2)$$

und in analoger Weise so auch für die (–)-Mode.

Das Endresultat der inkohärenten Faraday- bzw. inkohärenten mo Kerr-Drehung ist gegeben durch die sich aus der Matrizenrechnung ergebenden resultierenden komplexen Transmissions- und Reflexionsgrade, \tilde{T} und \tilde{R} , für die (+)- und die (–)-Polarisation

$$\begin{aligned}\vartheta(ik, A \rightarrow B) &= \text{ARG}[\tilde{T}(A \rightarrow B, +)] - \text{ARG}[\tilde{T}(A \rightarrow B, -)] \\ &= \text{ARG}\left[\frac{1}{\tilde{m}(ik, \text{res}, (1, 1), +)}\right] - \text{ARG}\left[\frac{1}{\tilde{m}(ik, \text{res}, (1, 1), -)}\right] \\ \eta(ik, A \rightarrow B) &= \text{ARG}[\tilde{R}(A \rightarrow B, +)] - \text{ARG}[\tilde{R}(A \rightarrow B, -)] \\ &= \text{ARG}\left[\frac{\tilde{m}(ik, \text{res}, (2, 1), +)}{\tilde{m}(ik, \text{res}, (1, 1), +)}\right] - \text{ARG}\left[\frac{\tilde{m}(ik, \text{res}, (2, 1), -)}{\tilde{m}(ik, \text{res}, (1, 1), -)}\right],\end{aligned}\quad (V, 3)$$

die sich ihrerseits, wie in Gl. (V, 3) ebenfalls angegeben, aus den komplexen Koeffizienten

$$\tilde{m}[ik, \text{res}, (f, g), +] \text{ und } \tilde{m}[ik, \text{res}, (f, g), -]$$

der resultierenden Matrizen der inkohärenten Rechnung

$$\|M(ik, \text{res}, A \rightarrow B, +)\| \text{ und } \|M(ik, \text{res}, A \rightarrow B, -)\|$$

ableiten lassen.

Eine Beispielrechnung im Anhang [A/4] soll die durch diese Matrizenrechnung erreichbare Genauigkeit demonstrieren. Zum Vergleich wird die resultierende mo Drehung beim Faraday-Effekt und beim mo Kerr-Effekt jeweils berechnet a) mit dem Iterationsverfahren und b) nach dem hier vorgestellten Matrizen-Näherungsverfahren. Das dabei verwendete mo Dispersionsmodell entspricht der Materie mit einem Suszeptibilitätsanteil durch harmonische Oszillatoren mit magnetischer Aufspaltung der Resonanzfrequenz. Die Dispersionsfunktion und die verwendeten Parametern sind dazu im Anhang [A/3] angegeben, sie entsprechen der bereits im Teil I der Arbeit verwendeten Modellfunktion. Insofern ist damit dann auch ein Vergleich mit den dort aufgeführten Resultaten bei kohärenter Vielfachreflexion möglich.

Die mit dem hier vorgestellten Matrizen-Näherungsverfahren erreichten Genauigkeiten sind als sehr gut zu bezeichnen und übersteigen in der Regel die gegebenen Meß-

genauigkeiten. Die Abweichungen, die bei kleinen Drehwinkeln u.U. bereits durch die Rechengenauigkeit, also rein numerisch, bedingt sein können, liegen im Beispiel unter $2.5 \cdot 10^{-2} \%$. Die Genauigkeit ist jedoch im Einzelfall von der mo Dispersion abhängig und desto größer, je kleiner die Differenz in den mo Brechzahlen für die (+)- und (-)-Polarisation ist, d.h. je näher die komplexen Drehwinkelfaktoren beim reellen Wert Eins liegen.

Man kann diese Genauigkeitsaussage prüfen, indem man die Winkelargumente der komplexen Drehwinkelfaktoren in den Matrizenkoeffizienten um einen Faktor $U > 1$ vergrößert und zugleich die sich ergebenden resultierenden Drehwinkel durch diesen Faktor U dividiert. Infolge des nichtlinearen Drehwinkeltransportes steigt die relative Abweichung bezogen auf das „wahre“ Ergebnis, gewonnen durch die Iterationsrechnung, superlinear an. Im Anhang A/4 sind die Abweichungen für alle vier mo Resultate für aufsteigende Werte bis $U = 50$ angegeben und dort in Abb. A/4,1 graphisch dargestellt.

Umgekehrt ergibt sich aus dieser Erkenntnis die Möglichkeit, bei relativ großen Drehwinkeln in den Matrizenkoeffizienten durch Wahl eines geeigneten Drehwinkelfaktors $U < 1$ die Näherungsgenauigkeit zu verbessern.

Zur Abgrenzung gegenüber der in [6] bzw. [10] verwendeten Matrizenrechnung zur Berechnung des mo Drehwinkels, der sich auch dort auf die AD-Methode, weil auf das LPM-Meßverfahren, bezieht, ist auszuführen, daß eine gewisse Analogie besteht. Mit dem hier verwendeten Matrizenverfahren wird jedoch eine höhere Näherungsgenauigkeit erzielt. Das liegt daran, daß dort in den Matrizenkoeffizienten komplexe Phasenfaktoren transportiert werden, die durch Quadrierung noch verdoppelte mo Phasenwinkel enthalten. Bei der Volumenmatrix handelt es sich zwar auch nur um die mo Differenz, in den Grenzschichtmatrizen werden jedoch die vollen und dann noch verdoppelten Phasenwinkel der Transmissions- und Reflexionsfaktoren für die (+)- und (-)-Mode eingesetzt.

So wird auch verständlich, daß sich bei dem früheren Matrixrechenverfahren die Fehler insbesondere in der Kerr-Drehung bemerkbar machen. Ist nämlich die Volumen-Faraday-Drehung relativ groß (wegen hinreichend dicker Proben und/oder großer mo Brechzahldifferenzen), so haben daneben die Grenzschichtdrehungen vergleichsweise wenig Einfluß auf das Endresultat. – Die Berechnung der Elliptizitäten andererseits war ohnehin mit dieser Rechenversion unter Verwendung der komplexen, quadrierten Matrizenkoeffizienten nicht möglich.

Die von B. Sievers in seiner Diplomarbeit [13] entwickelte matrizentechnische Behandlung der inkohärenten komplexen mo Effekte stellt, ausgehend von den Rechnungen in [6] bzw. [10], bereits einen Schritt „in die richtige Richtung“ dar, kann also als Vorstufe zur vorliegenden Matrizenrechnung verstanden werden: Die mo Phasenwinkel der Eigenmoden werden dort nicht mehr mit dem absoluten Phasenwinkel und nicht mehr mit verdoppeltem Wert, sondern in der jeweiligen einfachen Größe in das Winkelargument der komplexen Matrizenkoeffizienten übernommen, so daß sich eine bessere Näherung sowohl für die resultierende inkohärente mo Drehung, als auch für die aus den Beträgen abgeleitete resultierende inkohärente mo Elliptizität in Transmission bzw.

Reflexion ergibt. Diese Elliptizitäten beziehen sich dabei, wie hier, nur auf die Resultate nach der ZPM-Methode der Elliptizitätsmessung. Diese Einschränkung wird jedoch nicht diskutiert, wie denn auch die Kennzeichnung als „korrekte Bestimmung“ den in Wahrheit existierenden Näherungscharakter dieser Rechnung übersieht.

Die Beispielrechnung im Anhang [A/4] weist durch Vergleich mit dem früher vorgeschlagenen Matrizen-Berechnungsverfahren die jetzt erzielte Verbesserung nach: Der Näherungsfehler geht im Beispielfall der resultierenden Kerr-Drehung von 23.8 % auf 0,025 % zurück! Auch hier kann man übrigens im Vergleich der Spektralverläufe (s. Abb. A/4,2) erkennen, daß sich die Ergebnisse beider Rechenmethoden nur dann unterscheiden, d. h. in der „alten“ Version die beschriebenen Fehler auftreten, wenn die Vielfachreflexion überhaupt wirksam ist. Bei wachsender Absorption in der Probe nähert sich das Resultat der früheren Rechenversion dem richtigen Resultat, das sich dann nurmehr aus dem einmaligen Reflex an der ersten Grenzschicht ergibt, an.

Neben der gesteigerten Genauigkeit bei der Berechnung des resultierenden mo Drehwinkels besitzt das hier vorgestellte verbesserte Matrizen-Rechenverfahren zur Berücksichtigung der inkohärenten Vielfachreflexion den Vorteil, daß sich mit dem reduzierten Winkelargument die komplexe Flußmatrix der reellen Flußmatrix annähert, die zur exakten Berechnung der mo Elliptizitäten nach der ZPM-Methode verwendet werden kann (siehe oben). Deswegen können nun auch mit Hilfe der verbesserten Matrizenrechnung in sehr guter Näherung die inkohärenten mo ZPM-Elliptizitäten, d. h. insgesamt die beiden resultierenden komplexen mo Effekte (Faraday-Effekt und mo Kerr-Effekt) bei inkohärenter Vielfachreflexion, berechnet werden. Die dazu dienenden Gleichungen lauten:

$$\varepsilon(ik, A \rightarrow B, ZPM) = \frac{\sqrt{ABS[\tilde{T}(A \rightarrow B, +)]} - \sqrt{ABS[\tilde{T}(A \rightarrow B, -)]}}{\sqrt{ABS[\tilde{T}(A \rightarrow B, +)]} + \sqrt{ABS[\tilde{T}(A \rightarrow B, -)]}}$$

$$\text{mit } ABS[\tilde{T}(A \rightarrow B, \pm)] = 1 / ABS[\hat{m}(ik, res, (1, 1), \pm)] \quad (V, 4)$$

$$\zeta(ik, A \rightarrow B, ZPM) = \frac{\sqrt{ABS[\tilde{R}(A \rightarrow B, +)]} - \sqrt{ABS[\tilde{R}(A \rightarrow B, -)]}}{\sqrt{ABS[\tilde{R}(A \rightarrow B, +)]} + \sqrt{ABS[\tilde{R}(A \rightarrow B, -)]}}$$

$$\text{mit } ABS[\tilde{R}(A \rightarrow B, \pm)] = \frac{ABS[\tilde{m}(ik, res, (2, 1), \pm)]}{ABS[\tilde{m}(ik, res, (1, 1), \pm)]}.$$

Eine zweifache Matrizenrechnung mit je unterschiedlichen Matrizen kann somit entfallen!

Die Beispielrechnung im Anhang [A/4] enthält zum Vergleich auch die relativen Genauigkeiten für die mo Elliptizitäten, die sich nach dem neuen Matrizen-Rechenverfahren ergeben. Im Beispielfall liegt die maximale Abweichung vom exakten Resultat, berechnet mit dem reellen Strahlungsflußdichte-Matrizenverfahren nach Kapitel IVa), unter 8 E-3 % und ist damit von der gleichen Größenordnung wie bei der Drehwinkelberechnung im gleichen Rechengang.

Die in [6, 10 und 13] gemachten Aussagen zur Reziprozität der mo Phänomene, die sich auf grundsätzliche Eigenschaften der verwendeten Matrizenrechnung stützen, bleiben unverändert gültig. Danach ist z. B. der resultierende komplexe Faraday-Effekt (also Drehung und Elliptizität in Transmission) sowohl bei kohärenter als auch bei inkohärenter Vielfachreflexion unverändert von gleichem Wert, wenn sich mit der Umkehr der Durchstrahlungsrichtung des geschichteten Systems auch die Magnetfeldrichtung umkehrt und der Quotient aus Imaginär- und Realteil der komplexen Brechzahlen von Eingangsmedium und Ausgangsmedium für jede Eigenmode gleich sind. – Auf eine weitergehende Diskussion soll hier verzichtet werden.

VI Ersatz-Grenzflächenmatrix eines kohärenten Schichtsystems

Ist innerhalb einer Schichtungsfolge ein Teil des Systems mit inkohärenter, ein anderer Teil mit kohärenter Vielfachreflexion vorhanden (s. Abb. 1), so kann für jede Eigenmode dieses kohärente Teilsystem zu einer

„inkohärenten mo Ersatz-Grenzschichtmatrix“ $\|\Gamma^{+(-)}(p \rightarrow q)\|$

zusammengefaßt und in die oben ausgeführten Rechnungen für ein inkohärentes Schichtsystem an der entsprechenden Stelle, nämlich für den Übergang von der Schicht „p“ zur Schicht „q“ [s. Abb. 1], eingebaut werden. Dabei handelt es sich um die allgemeine Form einer Fluß-Grenzschichtmatrix in komplexer Form, bei der die Beträge der Koeffizienten die Flußquantität und die Phasenargumente ausschließlich die mo Phasenwinkel „transportieren“ [vgl. Gl. (V, 2)]. – Da es sich bei der dargestellten „Grenzschicht“ nicht mehr um eine Halbraumgrenze handelt, die diesbezüglich Symmetrierelationen [vgl. Kapitel II, Gl. (II, 10)] also nicht mehr gelten, ist die Grundlage dieser mo Fluß-Grenzschichtmatrix die allgemeine Fluß-Grenzschichtmatrix:

$$\|\Gamma^{+(-)}(p \rightarrow q)\| \equiv \left\| \begin{array}{cc} \begin{array}{c} +(-) \\ \gamma(1,1) \end{array} & \begin{array}{c} +(-) \\ \gamma(1,2) \end{array} \\ \begin{array}{c} +(-) \\ \gamma(2,1) \end{array} & \begin{array}{c} +(-) \\ \gamma(2,2) \end{array} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} \frac{1}{\tilde{T}(p \rightarrow q, \pm)} & -\frac{\tilde{R}(q \rightarrow p, \pm)}{\tilde{T}(p \rightarrow q, \pm)} \\ \frac{\tilde{R}(p \rightarrow q, \pm)}{\tilde{T}(p \rightarrow q, \pm)} & X \end{array} \right\| \quad (\text{VI, 1})$$

$$\text{mit} \quad X = \tilde{T}(q \rightarrow p, \pm) - \frac{\tilde{R}(p \rightarrow q, \pm) \cdot \tilde{R}(q \rightarrow p, \pm)}{\tilde{T}(p \rightarrow q, \pm)}$$

Gleichermaßen ist die Bedeutung der Amplitudenkoeffizienten der resultierenden Matrix der kohärenten Stapelrechnung gegenüber der Gl. (II, 3) verändert, da es sich auch hier nicht mehr um die Matrix einer Halbraumgrenze handelt, sondern um die resultierende Matrix des kohärenten Teilsystems. Die hier anzuwendende allgemeine Form der Matrix mit den Amplitudenkoeffizienten lautet:

$$\|G^{+(-)}(\text{koh}, p \rightarrow q)\| = \left\| \begin{array}{cc} \frac{1}{\tilde{t}(p \rightarrow q, \pm)} & - \frac{\tilde{r}(q \rightarrow p, \pm)}{\tilde{t}(p \rightarrow q, \pm)} \\ \frac{\tilde{r}(p \rightarrow q, \pm)}{\tilde{t}(p \rightarrow q, \pm)} & \tilde{t}(q \rightarrow p, \pm) - \frac{\tilde{r}(p \rightarrow q, \pm) \cdot \tilde{r}(q \rightarrow p, \pm)}{\tilde{t}(p \rightarrow q, \pm)} \end{array} \right\| \quad (\text{VI}, 2)$$

Die zur Berechnung der inkohärenten mo Ersatz-Grenzschichtmatrix“ $\| \Gamma^{+(-)}(p \rightarrow q) \|$ notwendige Eliminierung der auf der optischen Weglängendifferenz bei $B = 0$ basierenden Phasenänderungen kann auf zweifache Weise erfolgen:

Die erste Möglichkeit, die die Kenntnis der magnetfeldfreien komplexen Brechungsindizes jeder Einzelschicht nicht erfordert und damit auch eine erneute Berechnung des kohärenten Stapels erübrigt, soll hier näher angegeben werden. Sie basiert darauf, daß den resultierenden Matrizen für die (+)- und die (–)-Polarisation, so wie sie zur Berechnung der komplexen Faraday- bzw. mo Kerr-Drehung des kohärenten Stapels anfallen, die notwendige Information entnommen wird: Berechnet man nämlich neben der komplexen Faraday- und mo Kerr-Drehung für die $p \rightarrow q$ -Lichttrichtung auch die entsprechenden Werte für die $q \rightarrow p$ -Lichttrichtung (also den Faraday- und mo Kerr-Effekt für die umgekehrte Lichttrichtung bei ungeänderter Magnetfeldrichtung), so stehen damit alle in der allgemeinen mo Ersatz-Grenzschichtmatrix [s. Gl. (VI, 1)] benötigten resultierenden mo Phasendifferenzen zwischen der (+)- und der (–)-Polarisation fest. Da es nur auf die mo Drehwinkel im System der inkohärenten Vielfachreflexion ankommt, hat man diese Phasendifferenz dann je zu einem Viertel mit wechselndem Vorzeichen als mo Drehwinkelanteil bei der (+)- und (–)-zirkularen Mode einzusetzen. Damit werden die mo Phasenwinkel für die inkohärente Rechnung korrekt übernommen, und die „feldfreien Phasenwinkel“ sind eliminiert.

Die zweite Möglichkeit erfordert die Kenntnis der feldfreien Brechungsindizes der beteiligten Medien (vgl. jedoch die Bemerkung dazu oben). Man berechnet dann zunächst die feldfreie Phasendifferenz innerhalb des „kohärenten Stapels“, und zwar unter Verwendung des magnetfeldfreien komplexen Brechungsindex für jede einzelne Schicht, mit Hilfe der feldfreien Matrizenrechnung. Das sich dabei ergebende resultierende Winkelformat ist von dem resultierenden Winkelformat bei $B \neq 0$ je bei der (+)- und (–)-Polarisation zu subtrahieren. Die weiterhin in der mo Ersatz-Grenzschichtmatrix erforderlichen Beträge der komplexen Flußgrößen der (+)- und (–)-Polarisation lassen sich unmittelbar aus den Matrizen der kohärenten Stapelrechnung durch Bildung des Quadrates des Absolutwertes der resultierenden komplexen Transmissions- bzw. Reflexionsfaktoren für den kohärenten Schichtungsanteil gewinnen.

Die Faraday- und die mo Kerr-Drehung für die $p \rightarrow q$ -Lichttrichtung bzw. die $q \rightarrow p$ -Lichttrichtung ergeben sich damit aus der resultierenden Matrix $\|M(\text{koh}, \text{res}, p \rightarrow q, \pm)\|$ des kohärenten Teilschichtsystems (Berechnung nach [6]), wie folgende Gesamtdarstellung zeigt:

Mit

$$\|M(\text{koh}, \text{res}, p \rightarrow q, \pm)\| \equiv \left\| \begin{array}{cc} \bar{m}^{+(-)}(1,1) & \bar{m}^{+(-)}(1,2) \\ \bar{m}^{+(-)}(2,1) & \bar{m}^{+(-)}(2,2) \end{array} \right\|$$

folgt:

$$\vartheta(\text{koh}, p \rightarrow q) = \text{Re} \left\{ \frac{1}{2 \cdot i} \ln \left(\frac{\bar{m}^{-}(1,1)}{\bar{m}^{+}(1,1)} \right) \right\}$$

$$\eta(\text{koh}, q \rightarrow p) = \text{Re} \left\{ \frac{1}{2 \cdot i} \ln \left(\frac{\bar{m}^{-}(1,1)}{\bar{m}^{+}(1,1)} \right) + \frac{1}{2 \cdot i} \ln \left(\frac{\bar{m}^{-}(2,1)}{\bar{m}^{+}(2,1)} \right) \right\}$$

(VI, 3)

$$\vartheta(\text{koh}, q \rightarrow p) = \text{Re} \left\{ \frac{1}{2 \cdot i} \ln \frac{C^{+}/\text{ABS}(C^{+})}{C^{-}/\text{ABS}(C^{-})} \right\}$$

$$\text{mit } C^{+(-)} = \bar{m}^{+(-)}(2,2) - \frac{\bar{m}^{+(-)}(1,2) * \bar{m}^{+(-)}(2,1)}{\bar{m}^{+(-)}(1,1)}$$

$$\eta(\text{koh}, q \rightarrow p) = \text{Re} \left\{ \frac{1}{2 \cdot i} \ln \frac{D^{+}/\text{ABS}(D^{+})}{D^{-}/\text{ABS}(D^{-})} \right\}$$

$$\text{mit } D^{+(-)} = - \frac{\bar{m}^{+(-)}(1,2)}{\bar{m}^{+(-)}(1,1)}$$

Für die Koeffizienten der inkohärenten mo Ersatz-Grenzschichtmatrix (VI, 1) gelten nunmehr insgesamt die folgenden Beziehungen, und zwar dem direkten Vorzeichen nach für die (+)-zirkuläre Polarisation:

$$\gamma^{+(-)}(1,1) = \left[\text{ABS}(\bar{m}^{+(-)}(1,1)) \right]^2 * \exp \left[-(+) \frac{i}{2} \vartheta(\text{koh}, p \rightarrow q) \right]$$

$$\gamma^{+(-)}(1,2) = - \left[\text{ABS}(\bar{m}^{+(-)}(1,2)) \right]^2 * \exp \left[+(-) \frac{i}{2} \left(\eta(\text{koh}, q \rightarrow p) - \vartheta(\text{koh}, p \rightarrow q) \right) \right] \quad (\text{VI}, 4)$$

$$\gamma^{+(-)}(2,1) = \left[\text{ABS}(\bar{m}^{+(-)}(2,1)) \right]^2 * \exp \left[+(-) \frac{i}{2} \left(\eta(\text{koh}, p \rightarrow q) - \vartheta(\text{koh}, p \rightarrow q) \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
 \gamma^{+(-)}(2,2) = & \left[\text{ABS} \left(\bar{m}^{+(-)}(2,2) - \bar{m}^{+(-)}(1,2) * \frac{\bar{m}^{+(-)}(2,1)}{\bar{m}^{+(-)}(1,1)} \right) \right]^2 * \\
 & * \exp \left[+(-) \frac{i}{2} \vartheta (\text{koh}, q \rightarrow p) \right] + \\
 & + \gamma^{+(-)}(1,2) = * \left[\text{ABS} \left(\frac{\bar{m}^{+(-)}(2,1)}{\bar{m}^{+(-)}(1,1)} \right) \right]^2 * \exp \left[+(-) \frac{i}{2} \eta (\text{koh}, p \rightarrow q) \right]
 \end{aligned} \quad (\text{VI}, 4)$$

Die Vorzeichen in Klammern gelten dann für die Koeffizienten der inkohärenten mo Ersatz-Grenzschichtmatrix für die $(-)$ -zirkulare Polarisation.

Es sei bemerkt, daß es unter Verwendung der entsprechenden komplexen Koeffizienten der inkohärenten mo Ersatz-Grenzschichtmatrix möglich ist, auch im Rahmen des „Iterationsverfahrens“ (s. Teil I der Arbeit) ein kohärentes Teilschichtsystem als „Grenzschicht“ einer Probe mit inkohärenter Vielfachreflexion einzubauen, und dies auf jeder Seite der Planplatte.

VII Zusammenfassung und Schlußbemerkungen

Die Berechnung der im Experiment der Messung zugänglichen mo Effekte, das sind der Faraday-Effekt und der mo Kerr-Effekt, hat zu berücksichtigen, daß bei einer planparallelen und u. U. in sich geschichteten Probe der transmittierte und der reflektierte Polarisationszustand des Lichtes u. U. beeinflusst ist durch in der Probe hin und her reflektierte Strahlanteile. Dabei ist der Fall der rein kohärenten Überlagerung der Strahlanteile von dem der inkohärenten zu unterscheiden.

Zusätzlich bestehen im Fall der inkohärenten Überlagerung Unterschiede in den die Polarisation des Lichtes bzw. in den die mo Effekte kennzeichnenden Meßgrößen: Das sind 1.) die Drehung der Schwingungsrichtung von linearpolarisiertem Licht bzw. der räumlichen Orientierung der großen Halbachse von elliptisch polarisiertem Licht und 2.) das Maß eben dieser Elliptizität. Diese Unterschiede hängen vom verwendeten Meßverfahren ab.

Das prominenteste Meßverfahren zur Analyse des Polarisationszustandes von Licht ist das der Drehung eines „Analysators“ und der Registrierung der jeweils am Detektor ankommenden Intensitäten als Funktion des Drehwinkels (hier „AD-Methode“ genannt). Ein zweites Meßverfahren stützt sich auf die Messung der Intensität, mit der einerseits die rechtszirkular- und andererseits die linkszirkular-polarisierte Mode des Lichtes (in Transmission bzw. Reflexion) auftreten. Diese Intensitäten der sich im Magnetfeld in der Materie ausbreitenden „Eigenmoden“ des Lichts können unter Verwendung eines geeigneten Zirkularpolarisators je getrennt vermessen werden (hier „ZPM-Methode“ genannt). Die zur mo Resultatanalyse notwendige Differenz beider Intensitäten wird dabei

zweckmäßigerweise mit Hilfe der rechts-links-zirkularen Polarisationsmodulation gewonnen, wobei die lock-in-Technik der Demodulation das beste Signal-Rausch-Verhältnis liefert.

Im Teil I der Arbeit wurde ein Iterationsverfahren angegeben, das in allen Fällen ein hinreichend genaues Resultat liefert. Allerdings bleibt bei vertretbarem Rechenaufwand dieses numerische Verfahren auf nur eine planparallele Schicht beschränkt.

Der vorliegende Teil II der Arbeit bezieht sich auf die in der „normalen“, d. h. magnetfeldfreien Optik verwendete Rechenmethode, die sich auf Matrizen stützt, um sowohl kohärente als auch inkohärente Vielfachreflexionen in beliebigen Schichtsystemen zu erfassen. Es wird untersucht, ob bzw. in welcher Weise ein entsprechendes Matrizenkalkül auf die Berechnung der mo Effekte bei inkohärenter Vielfachreflexion angewandt werden kann. – Es sei bemerkt, daß ein solches Matrizenverfahren im Fall ausschließlich kohärenter Vielfachreflexion in der Probe tatsächlich anwendbar ist. Die entsprechende Methode ist an anderer Stelle veröffentlicht [6].

Das Resultat der vorliegenden Untersuchung in Bezug auf den inkohärenten Fall der Vielfachreflexion kann wie folgt zusammengefaßt werden:

1.) Bei Anwendung der AD-Methode können die zu erwartenden Resultate nicht mit Hilfe eines Matrizenkalküls dargestellt werden, denn die Überlagerung der Intensitätscharakteristika der vielfachreflektierten Strahlanteile führt zu einer nichtlinearen Relation zwischen Eingangs- und Ausgangsgrößen. Die Matrizenrechnung ist jedoch grundsätzlich eine „lineare“ Rechnung.

Die inkohärenten AD-Elliptizitätswerte können jedoch mit Hilfe des in Teil I der Arbeit angegebenen Iterationsverfahrens berechnet werden. Aus numerisch-praktischen Gründen wird diese Rechnung allerdings auf eine einzelne planparallele Schicht beschränkt bleiben.

2.) Bei der ZPM-Methode kann

- a) die mo Elliptizität mit Hilfe einer doppelten Matrizenrechnung exakt berechnet werden.
- b) Da sich die mo Drehung mit dieser Meßmethode grundsätzlich nicht bestimmen läßt, ist eine rechnerische Darstellung also nicht relevant.

Eine Beispielrechnung stellt die unterschiedlichen, weil vom Meßverfahren (AD-Methode oder ZPM-Methode) definitionsgemäß abhängigen, inkohärenten mo Elliptizitätsspektren beim Faraday- und mo Kerr-Effekt gegenüber.

3.) Die bei der AD-Methode meßbare mo Drehung läßt sich jedoch mit Hilfe eines Matrizenkalküls in sehr guter Näherung bestimmen. Das diesbezüglich verbesserte Berechnungsverfahren dazu wird angegeben. Eine Beispielrechnung, die einen numerischen Vergleich liefert zwischen dem Iterationsverfahren und dem Matrizen-Näherungsverfahren, zeigt eine Näherungsgenauigkeit von ca $1 \cdot 10^{-4}$ %. Die Genauigkeit hängt jedoch im Einzelfall von der existierenden komplexen mo Dispersion der beteiligten Medien und den Schichtungsparametern ab. – Damit wird nun auch ein beliebiges Schichtsystem be-

rechenbar, da die zum Iterationsverfahren existierende Beschränkung auf eine planparallele Schicht entfällt.

4.) Das hier angegebene Matrizen-Näherungsverfahren erlaubt im gleichen Zuge auch die Berechnung der resultierenden Elliptizitätswerte der ZPM-Methode mit vergleichbarer Genauigkeit, d. h. mit Abweichungen unter ca. 1 E-4 %. – Damit entfällt ein separater Berechnungsvorgang nach 2.a).

5.) Ein Schichtsystemteil mit kohärenter Vielfachreflexion, der sich innerhalb eines Schichtsystems mit inkohärenter Vielfachreflexion befindet, kann mit Hilfe einer „inkohärenten mo Ersatz-Grenzschichtmatrix“ erfaßt und in das Matrizenkalkül nach Punkt 3.) und 4.) bzw. auch in das Iterationsverfahren nach Teil I der Arbeit eingebaut werden. Das Berechnungsverfahren für die Koeffizienten dieser Ersatz-Grenzschichtmatrix wird angegeben.

Mit diesen Ergebnissen liegen die Verhältnisse bei Existenz von inkohärenter Vielfachreflexion in einem Schichtsystem in Bezug auf die numerische Berechnung der mo Effekte bei Kenntnis der mo Brechzahlen der beteiligten Medien für die beiden Eigenmoden des Lichtes im Magnetfeld geklärt vor. Damit kann umgekehrt jetzt auch beurteilt werden, in welchen Fällen u. U. eine Möglichkeit besteht, durch Anpassungsrechnungen an gemessene Spektren von resultierender mo Drehung und mo Elliptizität die mo Brechzahlen und/oder den Schichtaufbau eines unbekannten Systems rückwärts zu analysieren.

Literatur

- [1] F. R. Keßler, Abh. d. Braunschweigischen Wiss. Ges., vol. 43 (1992), p. 55–76.
- [2] B. Harbecke, Appl. Phys., vol B 39 (1986), p. 165–170.
- [3] B. Donovan and T. Medcalf, Brit. J. Appl. Phys., vol. 15 (1964), p. 1139–1151.
- [4] R. F. O’Connell and G. L. Wallace, Phys. Lett. A, vol. 86 (1981), p. 283–284.
- [5] R. F. O’Connell and G. L. Wallace, Can. J. Phys., vol. 61 (1983), p. 49–53.
- [6] R. Nies and F. R. Keßler, phys. stat. sol. (a), vol. 111 (1989), p. 639–654.
- [7] F. R. Keßler and J. Metzdorf, in: G. Landwehr and E. I. Rashba (Editors), Landau Level Spectroscopy, Vol. I, Elsevier Sci. Publ., Amsterdam, 1991, Chapter 11, p. 479–675.
- [8] B. Johnson, Brit. J. Appl. Phys., vol. 18 (1967), p. 1001–1003.
- [9] H. Piller, J. Appl. Phys., vol. 37 (1966), p. 763–767.
- [10] R. Nies, Wiss. Ber. HMFA Braunschweig, ISSN 0723-9459, Folge 12 A, 1991/92.
- [11] F. R. Keßler, Abhandl. Braunschweigische Wiss. Ges., vol. 36 (1984), p. 45–85.
- [12] F. R. Keßler, Abhandl. Braunschweigische Wiss. Ges., vol. 38 (1986), p. 203–227.
- [13] B. Sievers, Diplomarbeit 1991 am Inst. f. Halbleiterphysik und Optik der Techn. Universität Braunschweig.

Anhang A/1

Kohärente magnetooptische Elliptizität:

Voraussetzung: Kohärente Überlagerung der vielfachreflektierten Wellenanteile der rechts-zirkular und links-zirkular polarisierten Eigenmoden zu resultierenden komplexen elektrischen Feldstärken $E(+)$ bzw. $E(-)$, die untereinander eine feste Phasenbeziehung besitzen.

1.) Allgemeine Definition der kohärenten (Faraday-)Elliptizität

$$\varepsilon(\text{koh}) = \frac{|\tilde{E}(+)| - |\tilde{E}(-)|}{|\tilde{E}(+)| + |\tilde{E}(-)|}$$

2.) Bestimmung der kohärenten (Faraday-)Elliptizität aus der Messung mit Hilfe der

- a) AD-Methode, wobei mittels Analysatordrehung die beiden Werte $F(\text{koh}, \min)$ und $F(\text{koh}, \max)$ ermittelt werden (zur Definition dieser Werte s. Kapitel I):

$$\varepsilon(\text{koh}, \text{AD}) = \sqrt{\frac{F(\text{koh}, \min)}{F(\text{koh}, \max)}}$$

- b) ZPM-Methode, wobei die relativen kohärent-resultierenden Strahlungsflußdichten der Eigenmoden $\Phi(\text{koh}, +)$ und $\Phi(\text{koh}, -)$ sukzessive bestimmt werden:

$$\varepsilon(\text{koh}, \text{ZPM}) = \frac{\sqrt{\Phi(\text{koh}, +)} - \sqrt{\Phi(\text{koh}, -)}}{\sqrt{\Phi(\text{koh}, +)} + \sqrt{\Phi(\text{koh}, -)}}$$

Wegen einerseits $\Phi(\text{koh}, +(-)) \sim |\tilde{E}(+(-))|^2$ und andererseits

$$F(\text{koh}, \min) = (|\tilde{E}(+)| - |\tilde{E}(-)|)^2 \text{ sowie}$$

$$F(\text{koh}, \max) = (|\tilde{E}(+)| + |\tilde{E}(-)|)^2$$

sind alle drei Elliptizitätsgleichungen in diesem „kohärenten Fall“ gleichwertig.

Anhang A/2

Beispielrechnung¹ zur Erläuterung des Unterschiedes zwischen den Resultaten der komplexen magnetooptischen („mo“) Effekte bei einerseits kohärenter („koh“) und andererseits inkohärenter („ik“) Vielfachreflexion („VR“) in einer planparallelen Probe bzw. in einem Schichtsystem.

Das Meßverfahren sei das der Einstrahlung von linear polarisiertem Licht und der Be-

¹ Das Beispiel entspricht dem zu den Gl. (11) und (12) in Teil I der Arbeit, womit dortige Schreibfehler korrigiert werden. Auf die dortigen weitergehenden Erläuterungen wird hier verwiesen.

stimmung des resultierenden mo Drehwinkels $\vartheta(\text{res})$ und der resultierenden mo Elliptizität $\varepsilon(\text{res})$ beim Faraday-Effekt mit Hilfe der Analysatordrehung („AD-Methode“).

Die Parameter der Beispielrechnung sind:

Planparallele Probe, Dicke $12,5 \mu\text{m}$, senkrechte Inzidenz

$$\tilde{n}(+) = (3.49, 0)$$

$$\tilde{n}(-) = (3.51, 0)$$

Vakuumwellenlänge der quasimonochromatischen Strahlung: $1.0 \mu\text{m}$

Ergebnis:

$$\text{a) } \vartheta(\text{koh}, \text{res}) = -27.823 \text{ Grad}$$

$$\varepsilon(\text{koh}, \text{res}) = 1.1614 \text{ E-3}$$

$$\text{b) } \vartheta(\text{ik}, \text{res}) = -45 \text{ Grad}$$

$$\varepsilon(\text{ik}, \text{res}) = 0.309$$

Anhang A/3

Beispielrechnung zur Erläuterung des Unterschiedes in den magnetooptischen („mo“) Elliptizitäten der mo Effekte bei Existenz inkohärenter („ik“) Vielfachreflexion („VR“) in der planparallelen Probe bzw. in einem Schichtsystem je nach verwendeter Meßmethode:

a) Analysatordrehung („AD-Methode“)

b) Zirkulare Polarisationsmodulation („ZPM-Methode“)

Vergleichende Darstellung der entsprechenden resultierenden („res“) Spektralfunktion der:

1.) Faraday-Elliptizität $\varepsilon(\text{ik}, \text{res})$

2.) mo Kerr-Elliptizität $\zeta(\text{ik}, \text{res})$

Berechnung der Elliptizitäten zur AD-Methode mit Hilfe des „Iterationsverfahrens“ (vgl. Teil I der Arbeit).

Berechnung der Elliptizitäten zur ZPM-Methode mit Hilfe der exakten Matrizenrechnung für die Strahlungsflußdichten der (+)- und der (-)-Eigenmode (vgl. Kapitel IVa).

Parameter der Beispielrechnung sind:

Oszillatormodell mit magnetischer Aufspaltung der Resonanzfrequenz

Berechnung der komplexen mo Dielektrizitätskonstanten nach

$$\tilde{\varepsilon}(\text{rel}, \pm) = 13.25 + \frac{5 \text{ E } 29 [1/\text{sec}]^2}{(\omega_0 \pm 1 \text{ E-4} * \omega_0)^2 - \omega^2 + i\omega/\tau'}$$

$$\text{mit } \omega_0 = 2\pi * c / 1.1 \text{ E-6 [m]}; c = \text{Vakuumlichtgeschwindigkeit};$$

$$\tau' = 1 \text{ E-13 [sec]};$$

$$\mu(\text{rel}) = 1; \tilde{n}(+) = \sqrt{\tilde{\varepsilon}(\text{rel}, +)}; \tilde{n}(-) = \sqrt{\tilde{\varepsilon}(\text{rel}, -)}$$

Wellenlängenbereich: $1.05 \mu\text{m}$ bis $1.08 \mu\text{m}$ Vakuumwellenlänge.

Ergebnisse:

Abb. A/3,1: $\varepsilon(\text{ik,res,AD}) = f(\lambda)$ und $\varepsilon(\text{ik,res,ZPM}) = f(\lambda)$

Abb. A/3,2: $\zeta(\text{ik,res,AD}) = f(\lambda)$ und $\zeta(\text{ik,res,ZPM}) = f(\lambda)$

jeweils in gemeinsamer Darstellung zum Vergleich.

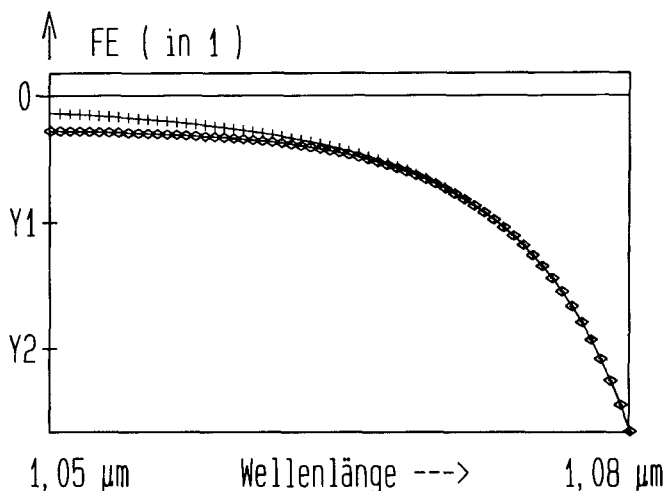


Abb. A/3,1: Spektralverlauf der resultierenden Faraday-Elliptizität („FE“) bei inkohärenter Vielfachreflexion im gegebenen Modellfall (s. dazu Text im Anhang [A/3]) bei unterschiedlichen Meßverfahren (zur weiteren Erläuterung s. insbesondere Kapitel IV):

—◇—◇—◇— = $\varepsilon(\text{ik,res,AD})$

—+—+—+— = $\varepsilon(\text{ik,res,ZPM})$

Ordinatenskalierung: $Y1 = -0.015$; $Y2 = -0.03$

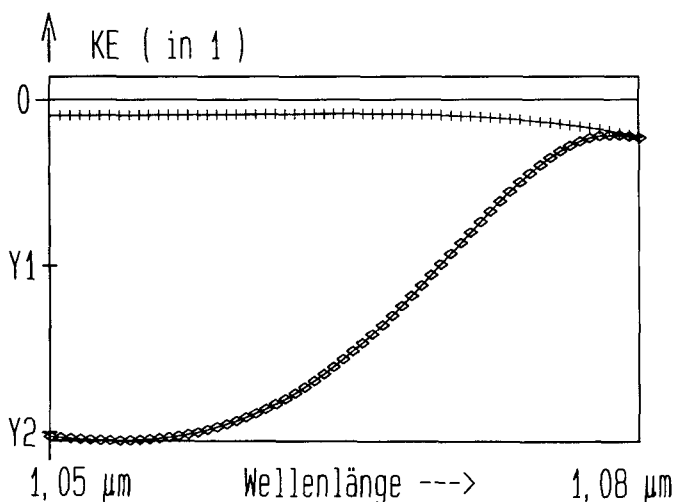


Abb. A/3,2: Spektralverlauf der resultierenden magnetooptischen Kerr-Elliptizität („KE“) bei inkohärenter Vielfachreflexion im gegebenen Modellfall (s. dazu Text im Anhang [A/3]) bei unterschiedlichen Meßverfahren (zur weiteren Erläuterung s. insbesondere Kapitel IV):

—◇—◇—◇— = $\zeta(\text{ik,res,AD})$

—+—+—+— = $\zeta(\text{ik,res,ZPM})$

Ordinatenskalierung: $Y1 = -0.004$; $Y2 = -0.008$

Anhang A/4

Genauigkeitsvergleich der diskutierten Matrizen-Rechenverfahren zur Berechnung der magnetooptischen („mo“) Effekte, das sind beim Faraday-Effekt und beim mo Kerr-Effekt der jeweilige Drehwinkel ϑ bzw. η und die Elliptizität ε bzw. ζ , bei inkohärenter („ik“) Vielfachreflexion in der planparallelen Probe bzw. im Schichtsystem.

Die Drehwinkelangabe bezieht sich auf die Messung mit Analysatordrehung („AD-Methode“), die Elliptizitätangabe auf die Messung mit Hilfe der zirkularen Polarisationsmodulation („ZPM-Methode“).

Die Bezugsgrößen für die Angabe der relativen Abweichungen sind die Werte, die in Hinsicht auf

- a) die Drehung mit Hilfe der Iterationsmethode und in Hinsicht auf
- b) die Elliptizität mit Hilfe der auf die Strahlungsflußdichten bezogenen reellen Matrizenrechnung berechnet wurden.

Die Beispielrechnung bezieht sich auf das bereits im Anhang A/3 definierte „Oszillatormodell“ und verwendet auch die dortigen Parameter. Die Zahlenwerte beziehen sich auf die (Vakuum-)Wellenlänge $= 1.05 \mu\text{m}$, bei der die angeführten Größen jeweils so große Beträge besitzen, daß eine relative Angabe der Abweichungen bei den einzelnen Rechenverfahren sinnvoll erscheint bzw. direkte Genauigkeitsvergleiche erlaubt. In der Vergleichstabelle sind auch die Werte selbst mit angegeben, um für die absoluten Zahlen einen Vergleich zu ermöglichen. Im allg. ist, wie hier konkret zu entnehmen, die resultierende Faraday-Drehung deutlich größer als die resultierende mo Kerr-Drehung, und die Faraday-Elliptizität ist deutlich größer als die mo Kerr-Elliptizität.

Das früher in [6] angegebene Matrizen-Rechenverfahren ist wegen der darin enthaltenen Quadrierung der komplexen Transmissions- und Reflexionsfaktoren in der Grenzschichtmatrix als „Q-Matrizenverfahren“ („QM-Verfahren“) bezeichnet, das hier vorgestellte verbesserte Verfahren wegen der Beschränkung auf den Drehwinkeltransport mit den Grenzschicht-Matrizenkoeffizienten als „DWTM-Verfahren“.

Innerhalb des DWTM-Verfahrens wird mittels des Drehwinkelfaktors U (zu Definition und Erläuterung s. Text) das Näherungsverhalten untersucht. Die sich ergebenden Abweichungen sind für die Werte $U = 4, 10, 20, 30$ und 50 berechnet. Die Abb. A/4,1 stellt das funktionale Verhalten der relativen Abweichungen in Abhängigkeit von U dar.

Die Abb. A/4,2 stellt vergleichend die Spektralverläufe der mo Kerr-Drehung beim gegebenen Modell dar, wie sie sich nach dem Iterationsverfahren, und damit praktisch ohne Abweichung auch nach dem DWTM-Rechenverfahren, und nach dem QM-Verfahren ergeben. Es soll damit demonstriert werden, daß die relativ großen Abweichungen beim QM-Verfahren asymptotisch verschwinden, wenn in der Probe die Absorption derart groß wird, daß Vielfachreflexion nicht mehr von Einfluß ist. Die mo Kerr-Drehung ist dann nurmehr durch den einmaligen Lichtreflex an der ersten Grenzschicht bedingt.

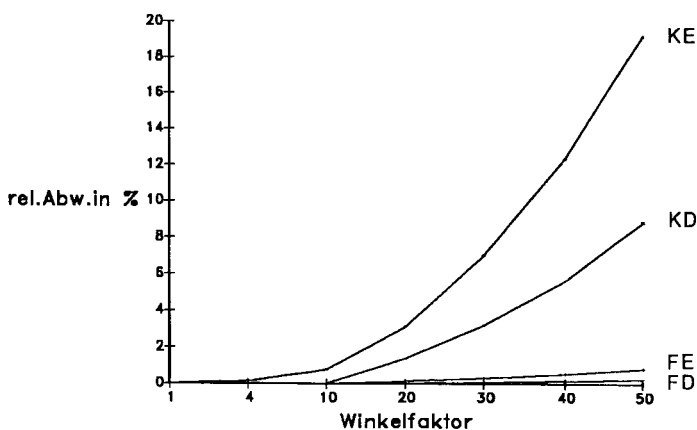


Abb. A/4,1 Abhängigkeit der relativen Abweichung (in %) der berechneten resultierenden magnetooptischen Größen FD = Faraday-Drehung; FE = Faraday-Elliptizität; KD = mo Kerr-Drehung, KE = mo Kerr-Elliptizität im Modellfall (s. dazu Text im Anhang [A/3]) bei der Vakuumwellenlänge $1.05 \mu\text{m}$ als Funktion des Winkelfaktors U bei dem DWTM-Rechenverfahren (zur weiteren Erläuterung s. Text)

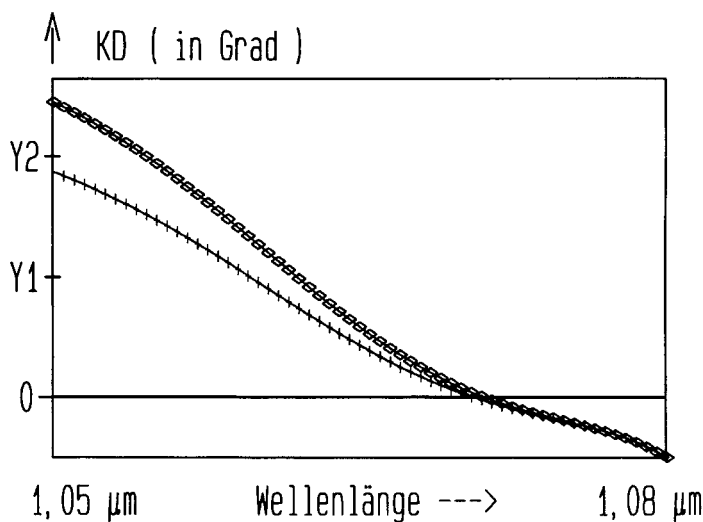


Abb. A/4,2: Spektralverlauf der resultierenden magnetooptischen Kerr-Drehung („KD“) bei inkohärenter Vielfachreflexion im gegebenen Modellfall (s. dazu Text im Anhang [A/3]) bei unterschiedlichen Berechnungsverfahren (zur weiteren Erläuterung s. insbesondere Kapitel V):

—◇—◇—◇— = $\eta(\text{ik, res, AD})$ berechnet mit dem Iterationsverfahren,
 -+-+--+ = $\eta(\text{ik, res, ZPM})$, berechnet mit dem früher angegebenen Matrizenverfahren („QM-Verfahren“) nach [6]

Ordinatenskalierung: $Y1 = 0.05$; $Y2 = 0.1$

Tabellarische Ergebnisübersicht für die Beispielrechnung:

„Oszillatormodell“; Parameter wie in Anhang [A/3];

Vakuumwellenlänge $\lambda = 1.05 \mu\text{m}$; Werte und relative Abweichungen („Abw.“ in % zum Bezugswert für die folgenden mo Größen:

- 1) Faraday-Drehung (ik, res, AD-Methode)= FD (ik,res,AD)
- 2) Faraday-Elliptizität (ik, res, ZPM-Methode)= FE (ik,res,ZPM)
- 3) mo Kerr-Drehung (ik, res, AD-Methode)= KD (ik,res,AD)
- 4) mo Kerr-Elliptizität (ik, res, ZPM-Methode)= KE (ik,res,ZPM)

	(s. Text)	QM-Verfahren		DWTM-Verfahren	
mo Größe	Bezugswert	Wert	Abw. in %	Wert	Abw. in %
FD (ik,res,AD)		-0.91722	0.05	-0.91772	0.0050
FE (ik,res,ZPM)	-2.01106	-2.01106	0.0	-2.01105	5E-4
KD (ik,res,AD)		-0.09350	23.8	-0.12270	2.
KE(ik,res,ZPM)	-3.75285	-3.75285	0.0	-3.75256	7.7E-3

Fortsetzung: DWTM-Rechenverfahren mit Drehwinkelfaktoren $U \neq 1$:

U = 4		10		20	
Wert	Abw. in %	Wert	Abw. in %	Wert	Abw. in %
-0.917770	3.3 E-3		0.0054	-0.917330	0.37
-2.01094	6.0 E-3	-2.01035	0.035	-2.008265 E-3	0.14
	0.033	-0.1227	0.024	-0.120953	1.4
-3.748134 E-4	0.125	-3.72335 E-4	0.786	-3.63526 E-4	3.1

U = 30		40		50	
Wert	Abw. in %	Wert	Abw. in %	Wert	Abw. in %
0.9168478	0.09		0.16	-0.91535	0.25
-2.004849 E-3	0.3	-2.000200	0.54	-1.99445 E-3	0.83
	3.2	-0.115757	5.6	-0.11192	8.8
-3.48977 E-4	7.0	-3.28892 E-4	12.3	-3.03563 E-4	19.1